

84 年自然組

單一選擇題(共 20 分)

一、九位學生的數學抽考成績為 30, 40, 60, 50, 70, 80, 60, 90, 60

- ___1. 這九個分數的中位數為何? (A) 40 (B) 50 (C) 60 (D) 70 (E) 80
 ___2. 這九個分數的標準差為何? (A) $\frac{10\sqrt{34}}{9}$ (B) $\frac{10\sqrt{34}}{3}$ (C) $\frac{20\sqrt{7}}{9}$ (D) $\frac{20\sqrt{7}}{3}$ (E) $\frac{2800}{9}$

現在使用簡單隨機抽樣法, 從這九個分數中取出三個, 請回答下面三小題

- ___3. 所取出三個分數中至少有一個為 60 分的取法有幾種? (A) 18 (B) 21 (C) 35 (D) 40 (E) 64
 ___4. 所取出三個分數的中位數等於 60 分的取法有幾種? (A) 18 (B) 27 (C) 43 (D) 46 (E) 55
 ___5. 若已知所取出三個分數中有一個為 70 分, 則在此條件下, 此三個分數的中位數等於 60 分的機率為 (A) $\frac{3}{14}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{15}{56}$

二、考慮一次方程組 $M_t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, 其中 $M_t = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 3-t & t+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ t+3 & 3t+1 \end{bmatrix}$, t 為實數

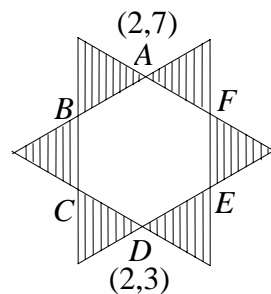
- ___6. 使此方程組恆有解的充分且必要條件為何?
 (A) $t = 5$ (B) $t = 1$ (C) $t \notin \{1, 5\}$ (D) $t \notin \{1, -3, 5\}$ (E) $t \notin \{-3, 1\}$
 ___7. 當 t 滿足第 6 題的正確條件時, 下列何者成立?
 (A) 對於任何一對 a, b , 此方程組恰有一組解 (B) 對於任何一對 a, b , 此方程組都有無限多組解
 (C) 僅只有一對 a, b , 使此方程組恰有一組解 (D) 僅只有一對 a, b , 使此方程組都有無限多組解
 (E) 有不只一對(但非所有的) a, b , 使此方程組都有無限多組解

若 $t=0, a=0, b=-1$ 則

- ___8. $\det(M_0^{-1}) =$ (A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{15}$ (D) 1 (E) 0
 ___9. $x =$ (A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{15}$ (D) 1 (E) 0
 ___10. $y =$ (A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{15}$ (D) 1 (E) 0

填充題 (每個空格 5 分)

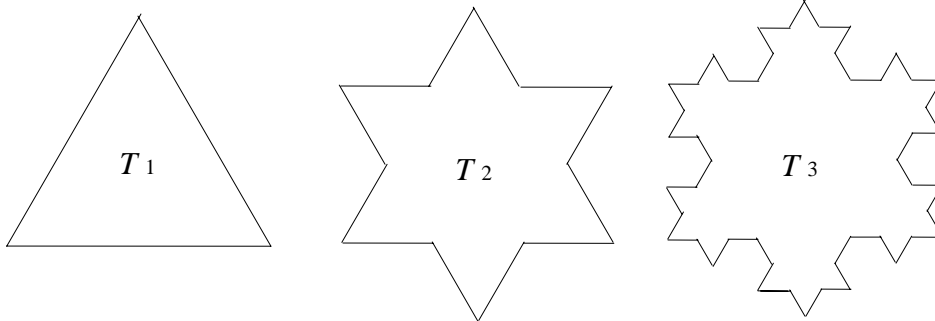
1. 設一圓與直線 $2x-5y-6=0$ 與 $2x-5y+10=0$ 都相切, 且圓心在直線 $x-2y+2=0$ 上, 則此圓的方程式為_____.
2. ABC 的三頂點坐標為 $A(2, -3, 5), B(3, 0, 10), C(x, y, 0)$, 則使 ABC 的周長為最小的 C 點坐標為_____.
3. 設 ABC 中, $\overline{AB} = 2, \overline{AC} = 1 + \sqrt{3}, \angle A = 30^\circ$, 則 \overline{BC} 的長度為_____, $\angle C$ 的大小為_____度.
4. 曲線 $y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$ 與 x 軸的交點中, 最左端的點的坐標為_____, 此曲線與 x 軸所圍成區域的面積為_____ (化為最簡分數)
5. 右圖中 $ABCDEF$ 為正六邊形, 將各邊延長形成一個六角星形, 令正六邊形所圍成之區域為 R_1 , 斜線區域為 R_2 , 設 $f(x, y) = 5x - 4y$ 則 $f(x, y)$ 在 R_1 上的最大值為_____
 $f(x, y)$ 在 R_2 上的最小值為_____
6. 設 $\frac{1}{p} + \frac{1}{3q} = 12$, 其中 p, q 為正數, 則 $3\log_{\frac{1}{3}} p + \log_{\frac{1}{3}} q$ 的最大值為_____, 此時 $(p, q) =$ _____.



計算題(每題 10 分)

1. 設 T_1, T_2, T_3, \dots 為一群多邊形, 其作法如下: T_1 為邊長等於 1 的正三角形, 以 T_n 每一邊中間三分之一的線段為一邊向外作正三角形, 然後將該三分之一線段抹去所得的多邊形為 $T_{n+1}, n=1, 2, \dots$ (如圖所示)

令 a_n 表 T_n 的周長, 請計算 T_3 的面積 _____ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} =$ _____



2. 試就實數 k 之值的變化, 討論二元二次方程式 $x^2 + y^2 + 2x + 2y + k(x^2 - y^2 + 2x + 2y) = 0$ 的圖形

3. 考慮函數 $f(x) = \cos 2x + 4 \sin^2 x - \cos x - 2$

(a) 解方程式 $f(x) = 0$

(b) 在 $0 < x < 2$ 的條件下, 解不等式 $f(x) > 0$

參考答案：

選擇題：1. C 2. D 3. E 4. D 5. B 6. D 7. A 8. C 9. C 10. B

填充題：1. $x^2 + y^2 + 12x + 4y + \frac{1096}{29} = 0$ 2. $(\frac{7}{3}, -2, 0)$ 3. $\sqrt{2}, 45$ 4. $(-1, 0), \frac{49}{30}$

5. $5\sqrt{3} + 2, -22 - 5\sqrt{3}$ 6. $8, (\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$

計算證明題：1. $\frac{10}{27}\sqrt{3}, \frac{4}{3}$ 2. $k = 0$ 時表一圓, $-1 < k < 1, k \neq 0$ 時表橢圓,

$k > 1$ or $k < -1$ 時表雙曲線, $k = -1$ 時表二重合直線, $k = 1$ 時表拋物線

3. (a) $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ or $x = (2n-1)\pi, n \in Z$ (b) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}, x \neq \pi$