

# 八十五學年度大學聯考自然組試題

第一部分：單一選擇題(共佔 20 分)

說明 本部分共有 10 題，每題的 5 個備選答案中，只有一個是對的。請將答案劃記在「答案卡」上。

每題 2 分，答錯了，倒扣 0.5 分；若不答，則得零分。

(1~2) 今有兩圓  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 95 = 0$  及  $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 48 = 0$  則

- \_\_\_\_ 1. 此兩圓的圓心距離為 (A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 8  
 \_\_\_\_ 2. 此兩圓的關係為 (A) 內離 (B) 內切 (C) 相交於兩點 (D) 外切 (E) 外離

(3~6) 適當選取數對  $(h, k)$  可使拋物線  $y = x^2 + hx + h - k^2$  與  $x$  軸相切或無交點。設  $D$  為所有此種數對  $(h, k)$  在平面上所對應的點所構成的區域。試問

- \_\_\_\_ 3. 區域  $D$  的邊界是何種圖形? (A) 圓 (B) 橢圓 (C) 拋物線 (D) 雙曲線 (E) 兩條直線  
 \_\_\_\_ 4. 在區域  $D$  中，使得  $2h - 3k$  之值最大的點之坐標  $(h, k)$  為何?

- (A)  $(\frac{2}{5}, -\frac{3}{5})$  (B)  $(2, 1)$  (C)  $(\frac{18}{5}, -\frac{3}{5})$  (D)  $(2, -1)$  (E)  $(0, -4)$

- \_\_\_\_ 5.  $2h - 3k$  在區域  $D$  上的最大值為何? (A) 1 (B) 9 (C) 7 (D)  $\frac{13}{5}$  (E) 12

- \_\_\_\_ 6.  $2h - 3k$  在區域  $D$  上的最小值為何? (A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1 (E) -2

(7~10) 在下圖中， $\triangle OA_0A_1$  是一底角為  $30^\circ$

而腰長為 1 的等腰三角形。已知  $\angle OA_1A_2 = 30^\circ$ ，

線段  $\overline{A_0A_1}$ ， $\overline{A_2A_3}$ ， $\overline{A_4A_5}$ ，……互相平行，且

線段  $\overline{A_1A_2}$ ， $\overline{A_3A_4}$ ， $\overline{A_5A_6}$ ，……也互相平行。試問

- \_\_\_\_ 7. 比值  $\overline{A_1A_2} : \overline{A_0A_1}$  等於多少?

- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (E)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

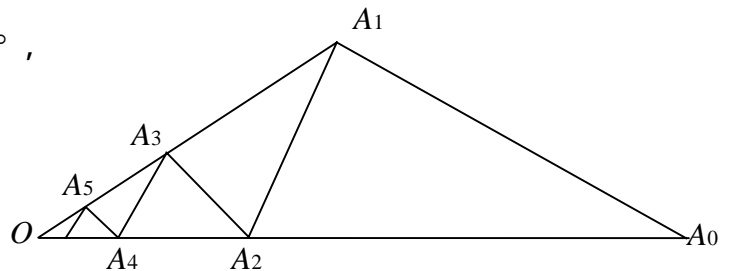
- \_\_\_\_ 8. 線段  $\overline{A_0A_1}$ ， $\overline{A_1A_2}$ ， $\overline{A_2A_3}$ ，…… $\overline{A_{n-1}A_n}$ ，……的長度之和等於多少?

- (A)  $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$  (B)  $\frac{2}{2-\sqrt{3}}$  (C) 2 (D)  $\frac{2}{2-\sqrt{2}}$  (E)  $\frac{4}{4-\sqrt{3}}$

- \_\_\_\_ 9.  $\triangle A_1A_2A_3$  的面積為何? (A)  $\frac{1}{16}$  (B)  $\frac{3\sqrt{3}}{16}$  (C)  $\frac{\sqrt{2}}{8}$  (D)  $\frac{9\sqrt{3}}{2}$  (E)  $\frac{\sqrt{3}}{18}$

- \_\_\_\_ 10. 三角形  $\triangle A_1A_2A_3$ ， $\triangle A_3A_4A_5$ ， $\triangle A_5A_6A_7$ ，……， $\triangle A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}$ ，……的面積之和等於多少?

- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{16}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{12}$  (C)  $\frac{3\sqrt{3}}{7}$  (D)  $\frac{\sqrt{2}}{6}$  (E)  $\frac{3\sqrt{3}}{16}$



第二部分：非選擇題(四大題，共佔 80 分)

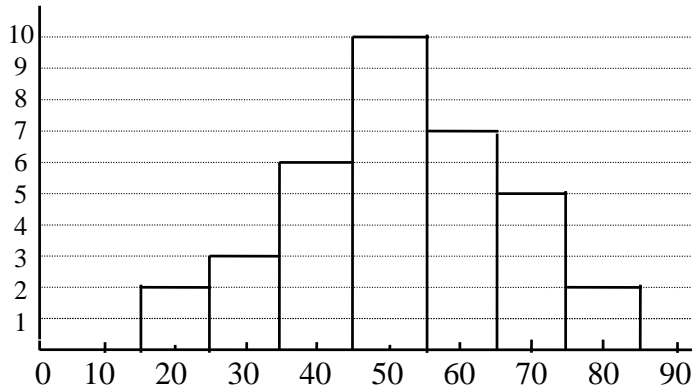
說明：除非題意要求，否則請勿將無理數或無限小數寫成有限小數。例如，不要把  $\sqrt{2}$  寫成 1.414，也不要將  $\frac{1}{3}$  寫成 0.333。

一、填充題，本題共有十個空格，每個空格 5 分，請答在「非選擇題試卷」上的第一欄，務必寫上格號 (A, B, ..., J) 後，再寫答案。(為節省空間，本題作答請不要寫出演算過程。)

1. 若多項式  $f(x)$  滿足  $f(1) = 0$ ， $f'(1) = -15$  則  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{3h} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 若  $g(x) = \ln \sqrt{2 + \cos^3 x}$  則  $g'(\frac{\pi}{3}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 高中某班學生數學月考的成績皆為 10 的倍數。採用組距為 10 並且組中點是各組上、下限之平均數，將該班數學成績做成如下直方圖。



則該班數學月考成績之標準差為\_\_\_\_\_ (求至個位數)，  
變異係數為\_\_\_\_\_ % (求至個位數)。

4. 用 0,1,2,3,4,5 等六個數字所排成的三位數中，數字不重複者共有\_\_\_\_\_個，  
其中可被 3 整除的共有\_\_\_\_\_個。
5. 設  $z_1 = 2 + ai$ ,  $z_2 = 2b + (2-b)i$ ，其中  $a, b$  為實數， $i = \sqrt{-1}$ 。若  $|z_1| = \sqrt{2}|z_2|$ ，  
且  $\frac{z_1}{z_2}$  的輻角為  $\frac{\pi}{4}$ ，則數對  $(a, b) =$ \_\_\_\_\_。

6. 若齊次方程組 
$$\begin{cases} x + 2y + 4z + 2t = 0 \\ 3x + 5y + 10z + 4t = 0 \\ 2x - y + z + t = 0 \\ x + y + az + (a+2)t = 0 \end{cases}$$
 有不為零的解，則  $a =$ \_\_\_\_\_。

7. 設  $\triangle ABC$  的三邊長為  $\overline{AB} = 8$ ,  $\overline{BC} = 2\sqrt{13}$ ,  $\overline{AC} = 4$ ，且  $H$  為  $\triangle ABC$  的垂心。

若  $\overrightarrow{AH} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，則數對  $(x, y) =$ \_\_\_\_\_。

8. 設二次多項式  $f(x)$  滿足  $5f'(1) = 2f(2)$  及  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ 。若  $f(x) = 0$  的兩個根為  $\alpha, \beta$ ，而  $\alpha < \beta$ ，  
則數對  $(\alpha, \beta) =$ \_\_\_\_\_。

二、試利用數學歸納法證明棣美弗定理：

$$\boxed{[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)} \quad \text{其中 } r \text{ 為正數，} n \text{ 為正整數。}$$

- 三、設拋物線  $y = ax^2 + bx + c$ ，與直線  $7x - y - 8 = 0$  相切於點  $(2, 6)$ ，而且與直線  $x - y + 1 = 0$  相切。  
試求  $a, b, c$  之值。

四、設函數  $f(x)$  為一可微分函數， $P$  為  $y = f(x)$  圖形上距離原點  $O$  最近的一點。

(1) 若  $P$  點的坐標為  $(a, f(a))$ ，試證  $a + f(a)f'(a) = 0$ 。

(2) 若  $y = f(x)$  之圖形不通過原點，試利用第(1)小題之結果，證明直線  $\overleftrightarrow{OP}$  為  $y = f(x)$  之圖形上過  $P$  點的法線。

參考答案：

選擇題：1. D 2. A 3. B 4. C 5. B 6. D 7. D 8. A 9. E 10. A

填充題：1. -5 2.  $\frac{-3\sqrt{3}}{34}$  3. (1) 15 (2) 29 4. (1) 100 (2) 40 5.  $(\frac{10}{3}, \frac{4}{3})$

6. 5 7.  $(\frac{7}{207}, \frac{175}{207})$  8.  $(\frac{1}{3}, 1)$

計算證明題：二. 略 三. 3, -5, 4 四. 略