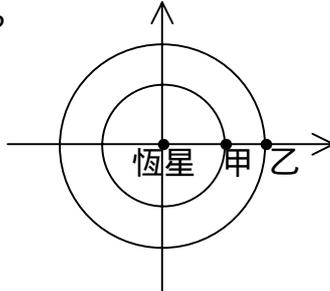


八十九學年度大學聯考自然組試題

第一部份，選擇題

單一選擇題：

- 設 H 為銳角三角形 ABC 的垂心 (三高之交點), 若以 c 表線段 \overline{AB} 之長, 則線段 \overline{AH} 之長等於
 (A) $c \cos A \sin C$ (B) $c \cos A \cos C$ (C) $c \cos A \tan C$ (D) $c \cos A \sec C$ (E) $c \cos A \csc C$
- 某恆星系統中有甲、乙兩行星。假設兩者公轉軌道在同一平面上, 且為以恆星為圓心的同心圓。某時, 甲行星在恆星與乙行星之間而成一直線。今在該平面上設定一座標系如下圖。已知兩行星皆以逆時針方向運行, 且公轉之週期為 $2:7$ 。試問下一次甲行星再度在恆星與乙行星之間而成一直線時, 應該是下面哪一種狀況?



- 行星在第一象限
 - 行星在第二象限
 - 行星在第三象限
 - 行星在第四象限
 - 行星在正 x 軸上
- 某班有 48 名學生, 某次數學考試之成績, 經計算得算數平均數為 70 分, 標準差為 5 分。後來發現成績登錄有誤, 某甲得 80 分卻誤記為 50 分, 某乙得 70 分卻誤記為 100 分, 更正後重算得標準差為 S_1 分, 試問 S_1 與 S 之間, 有下列哪種大小關係? (n 個數值 x_1, x_2, \dots, x_n 的標準差公式為

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2}, \text{ 而 } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- $S_1 < S - 5$ (B) $S - 5 \leq S_1 < S$ (C) $S_1 = S$ (D) $S < S_1 \leq S + 5$ (E) $S + 5 < S_1$
- 袋中有六個乒乓球, 分別編號為 1, 2, 3, 4, 5, 6。每次自袋中隨機抽取一球, 然後將袋中編號為該球號碼之因數或倍數者一併自袋中取出 (例如第一次抽中 2 號球, 則將 1 號、2 號、4 號、6 號四球皆取出), 再進行下一次的抽取。試問最後一次抽取時, 袋中只剩 5 號球的機率是多少?
 (A) $\frac{7}{18}$ (B) $\frac{9}{18}$ (C) $\frac{11}{18}$ (D) $\frac{13}{18}$ (E) $\frac{15}{18}$

多重選擇題：

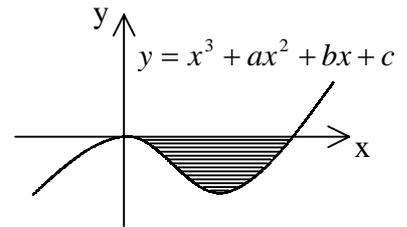
- 有一 4 階方陣, 其中每一 (i, j) 元不是 0 就是 1, 則其秩可能是 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4。
- 設 a 一非零實數, 試問方程式 $x^3 + x^2 - x + a = 0$ 的根可能的情形為何?
 (A) 有三個負根 (B) 有兩個負根和一個正根 (C) 有一個負根和兩個正根 (D) 有三個正根
 (E) 僅有一個實根。

第二部分：

一、填充題：本題共有 5 個空格，為節省空間，本題作答請不要寫出演算過程

1. 設實係數二次方程式 $x^2 + x + c = 0$ 的兩根 a, b 都不是實數, 而且 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ 也正是此方程式的兩根, 則 $a^2 + b^2$ 的數值為_____。
2. 某甲在股票市場裡買進賣出頻繁。假設每星期結算都損失該星期初資金的 1%, 而第 n 星期結束後資金總損失已超過原始資金的一半, 則 n 最小為_____。
(已知 $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771, \log_{10} 11 = 1.0414$)。
3. 設 $ABCD$ 為一四面體, 而 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 1, \angle DAB = \angle DAC = \angle BAC = 30^\circ$, 則 BCD 的面積為_____。
4. 設 $(p, 0)$ 為橢圓 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ 的長軸上一定點, 且 $0 < p < \frac{3}{2}$ 。若點 (a, b) 為橢圓上距離 $(p, 0)$ 最近之點, 則 $a =$ _____。(以 p 的函數表示)
5. 已知從點 $(1, 2, 2)$ 到球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所作所有切線的切點都會在同一平面上, 則此平面之方程式為_____。

- 二、設曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 之圖形如右圖, 且與 $y = 0$ 在原點相切。若此切線與曲線所圍的區域(圖中斜線部分)的面積為 3, 試求常數 a, b, c 之值。



- 三、設 $A(4,4), B(2,1)$ 為 xy 平面上兩點, 而直線 $y = ax + b$ 與線段 \overline{AB} 相交。作一圖, 以 a 為橫座標、 b 為縱座標。將數對 (a, b) 的範圍表示出來。

參考答案：

選擇題：1. E 2. B 3. B 4. A 5. ABCDE 6. BCE

一、填充題：1. -1 2. 69 3. $\frac{2\sqrt{3}-3}{4}$ 4. $\frac{4p}{3}$ 5. $x+2y+2z=1$

計算證明題：二、 $a=-\sqrt{6}, b=0, c=0$ 三、 $(4a+b-4)(2a+b-1)\leq 0$