

90 年大學聯考自然組試題

第一部份，選擇題：單一選擇題：共有 4 題，每題 6 分，答錯倒扣 1.5 分

1. 假設有一種特製的骰子，其六個面上的點數各為 2,3,4,5,6,7，現在同時投擲兩顆公正的這種骰子，則其點數和為幾點時機率最大？
(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10
2. 設一球之球心與一正立方體之中心重合，考慮球面與正立方體所有邊的交點，則交點的個數不可能是 (A) 0 (B) 8 (C) 12 (D) 16 (E) 24
3. 根據內政部統計，台灣地區在西元 2000 年底有 2228 萬人，而最近九年的人口平均年增加率為 0.0087，假設此後一世紀內，人口的年增加率皆為 0.0087，則台灣地區人口增加 50% 而達到 3342 萬時，會最接近下面所列的哪一年(西元)?
(A) 2040 (B) 2050 (C) 2060 (D) 2070 (E) 2080

	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
常用對數表 $y = \log_{10} x$	10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
	11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
	12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
	13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
	14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
	15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014

4. 函數 $f(x) = x - \frac{2}{3}x^3$ 是下列哪一個函數在 $x=0$ 附近的三次近似?
(A) $\sin x$ (B) $\cos x$ (C) $\sin x + \cos x$ (D) $\sin x - \cos x$ (E) $\sin x \cdot \cos x$

多重選擇題：共有 2 題，每題的 5 個備選答案中，至少有一個是對的。每題 8 分；每答對一個選項，可得 1.6 分；每答錯一個選項，倒扣 1.6 分；若完全不答，則得零分。

5. 設平面上已有兩點(0,0)、(a,b)，其中 $a \neq b$ 而且 a 與 b 皆不為零，現在要選第三點，使得以此三點為頂點之三角形為等腰，則下列哪些點可選為第三點？
(A) (b,a) (B) (-b,a) (C) (a-b,b-a) (D) (0,2b) (E) (2a,0)
6. 某班的 50 名學生參加一項考試，考題共有 100 題，全為 5 選 1 的單選題，計分方法共有 X、Y 兩種；若某學生有 N 題放棄沒答，R 題答對，W 題答錯，則 $X = R - \frac{W}{4}$, $Y = R + \frac{N}{5}$ ，

試問下列敘述哪些是正確的？

- (A) 同一學生的 X 分數不可能大於 Y 分數
- (B) 全班 X 分數的算術平均數不可能大於 Y 分數的算術平均數
- (C) 任兩學生 X 分數的差之絕對值不可能大於 Y 分數的差之絕對值
- (D) 用 X 分數將全班排名次的結果與用 Y 分數排名次是完全相同的
- (E) 兩種分數的相關係數為 1

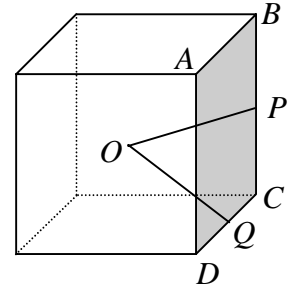
第二部分：

一、填充題：(共有 5 個空格，每個空格 8 分)，為節省空間，本題作答請不要寫出演算過程

1. 假設整係數方程式 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 40 = 0$ 有四個相異的正整數根，則四根之和為_____。

2. $E_1: x + y + z - 1 = 0$ 與 $E_2: x + y + z + 1 = 0$ 兩平面之間的距離為_____。

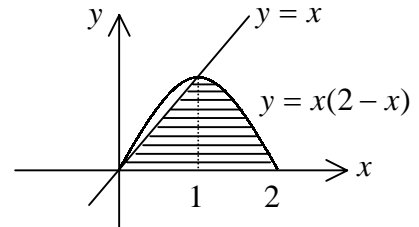
3. 如右圖， $ABCD$ 為正立方體的一個面， P 、 Q 分別為 \overline{BC} 、 \overline{CD} 的中點， O 為正立方體的中心，則 $\cos(\angle POQ) =$ _____。



4. 設 M 為 3×2 矩陣，而且

$$M \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{則 } M \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \text{_____}.$$

5. 假設地球為一球體。今以地球球心為原點，地球半徑為單位長，建立一直角坐標系。設地球表面上有甲乙丙三地，甲、乙兩地的坐標分別為 $(1, 0, 0)$ 、 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ，而丙地正好是甲乙兩地之間最短路徑的中點，則丙地的坐標為_____。



二、如右圖，斜線部分為拋物線 $y = x(2 - x)$ 與直線 $y = x$ 及 x 軸所圍成的區域，求此區域之面積。

三、設 a 為一常數，若直線 $y = ax$ 與曲線 $y = \ln x$ 有交點，則 a 的最大可能值為多少？

參考答案：

選擇題：1. D 2. D 3. B 4. E 5. ABCDE (其中 AC 可能會三點共線) 6. ABDE

一、填充題：1. 12 2. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ 5. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6})$

計算證明題：二、 $\frac{7}{6}$ 三、 $\frac{1}{e}$