

九十三學年度大學指定科目考試數學乙試題

第壹部分：選擇題（佔 77 分）

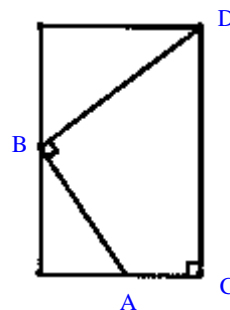
一、單一選擇題：（佔 28 分）

說明：第 1 至 4 題為單一選擇題，每題選出最適當的一個選項，劃記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 7 分，答錯倒扣 1.75 分，倒扣到本大題之實得分數為零為止。未作答者，不給分亦不扣分。

1. 如圖， $\angle BAC = \theta$ ， $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = a$ ，

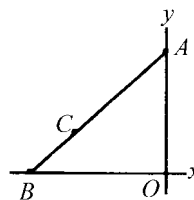
$\overline{BD} = b$ ，下列選項合者可以表示 \overline{CD} ？

- (1) $a \sin \theta + b \cos \theta$ (2) $a \sin \theta - b \cos \theta$
(3) $a \cos \theta - b \sin \theta$ (4) $a \cos \theta + b \sin \theta$
(5) $a \sin \theta + b \tan \theta$



2. 如圖所示，線段 \overline{AB} 的長度為定值，且 $\overline{AC} : \overline{CB} = 2 : 1$ 。

保持點 A 在 y 軸上，上下移動，且點 B 在 x 軸上左右移動時，點 C 所經過的路徑會形成一圖形。試問此圖形為何？(1) 一橢圓 (2) 一圓 (3) 一雙曲線 (4) 一菱形 (5) 一線段



3. 統計學家克利夫蘭對人體的眼睛詳細研究後發現：我們的眼睛看到圖形面積的大小與此圖形實面積的 0.7 次方成正比。例如：大圖形是小圖形的 3 倍，眼睛感覺到的只有 $3^{0.7}$ （約 2.16）倍。觀察某個國家地圖，感覺全國面積約為某縣面積的 10 倍，試問這個國家的實際面積大約是該縣面積的幾倍？

（已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 7 \approx 0.8451$ ）

- (1) 18 倍 (2) 21 倍 (3) 24 倍 (4) 27 倍 (5) 36 倍

4. 由電腦隨機選出 127 個正整數，取其最高位數字（如：35 為 3，110 為 1）

所得的次數分佈如下圖。若從這 127 個正整數中任取一個，則其最高位數字

為 d ($d = 1, 2, 3, \dots, 9$) 的機率 P 最接近下列哪一選項？

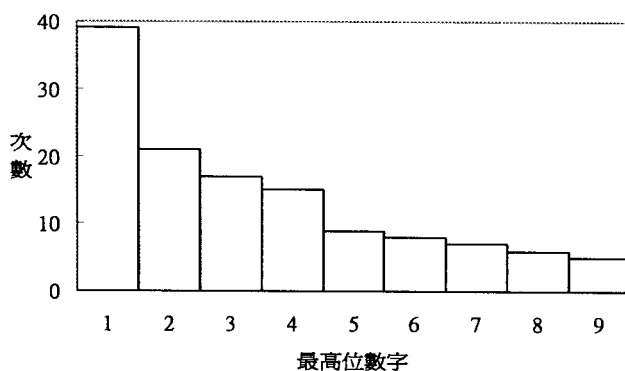
(1) $P = \frac{1}{9}$

(2) $P = \frac{1}{2} - \frac{1}{90}d$

(3) $P = \frac{(d-5)^2}{60}$

(4) $P = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^d$

(5) $P = \log\left(1 + \frac{1}{d}\right)$



二、多重選擇題：(14 分)

說明：(1) 以下第 5~6 題為多重選擇題。

(2) 每題各有 5 個選項，請將正確答案，劃記在答案卡之「解答欄」。

(3) 每題 7 分，5 個備選答案各自獨立，唯至少有一個是對的；每個備選答案，若選擇正確，則得 1.4 分；否則倒扣 1.4 分；整題未作答者，得零分。若在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣 1.4 分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。

5. 在空間中，一平面與一正立方體相截，若在平面的兩側各有正立方體的 4 個頂點，則其截面的形狀可能是下列哪種圖形？
- (1) 三角形 (2) 四邊形 (3) 五邊形 (4) 六邊形 (5) 八邊形
6. 某校要從高一的「忠、孝、仁、愛」四個班中隨機選取一個班級進行數學抽測。考慮甲、乙兩種抽樣方法：甲方法是從四個班級的導師中隨機選取一人，被選中導師的班級為抽測班級；乙方法是從所有高一學生中隨機選取一名學生，被選中學生的班級為抽測班級。若各班人數都不相同，其中「愛」班人數最多。則下列敘述有哪些是正確的？
- (1) 甲方法中，每位高一學生被抽測的機率相等
- (2) 乙方法中，每位高一學生被抽測的機率相等
- (3) 甲方法中，四個班級被抽測的機率相等
- (4) 乙方法中，四個班級被抽測的機率相等

(5) 「愛」班被抽測的機率，使用甲方法較使用乙方法高

三、選填題 (35 分)

說明：A、B、C、D、E 各題為選填題，劃記在答案卡的「解答欄」所標示的列號 (7-20) 內。每題完全答對得 7 分，未完全答對不給分。

- A. 設 a 為實數，令 α, β 為二次方程式 $x^2 + ax + (a - 2) = 0$ 的兩根。試問當 a 為何值時， $|\alpha - \beta|$ 的值最小？答 $a = \underline{\textcircled{7}}$
- B. 啦啦隊競賽規定每隊 8 人且每隊男生、女生均至少要有 2 人。某班共有 4 名男生及 7 名女生想參加啦啦隊競賽。若由此 11 人中依規定選出 8 人組隊，則共有 $\textcircled{8} \textcircled{9} \textcircled{10}$ 種不同的組隊方法。
- C. 阿貴和阿美及其他 8 名同學共 10 名學生輪到本周擔任值日生。本周 5 個上課日每天從尚未當過的同學中抽籤選出 2 位輪值。則阿貴和阿美同一天擔任值日生的機率為 $\frac{\textcircled{11}}{\textcircled{12}}$ 。(答案以最簡分數表示)
- D. 李探長為了找尋槍手的可能發射位置，他設定一空間坐標，先從 $(0,0,2)$ 朝向 $(5,8,3)$ 發射一固定雷射光束，接著又從點 $(0,7,a)$ 沿平行於 x 軸方向發射另一雷射光束，試問當 a 為何值時，兩雷射光束會相交？答： $a = \underline{\underline{\textcircled{13} \textcircled{14} \textcircled{15}}}$
- E. 當平面上的點 (x, y) 之坐標 x 與 y 都是整數時，稱 (x, y) 為格子點。數學家知道：坐標平面上三個頂點皆為格子點的三角形之面積可以用公式 $aS + bI + c$ 來表示，其中 S 代表三角形三邊上的格子點數， I 是落在三角形內部（不含邊上）的格子點數， a, b, c 是固定的常數。則 $(a, b, c) = \underline{\underline{\textcircled{16} \textcircled{17}, \textcircled{18}, \textcircled{19} \textcircled{20}}}$

第貳部分：非選擇題 (佔 23 分)

說明：一、二為計算證明題，請在「答案卷」之「作答區」作答，必須於「題號欄」標明題號，同時必須寫出演算過程或理由，否則將酌予扣分。每題配分標於題末。

一. 南北生技農場今年生產一種植物共 1 萬公斤，該植物每 200 公斤可提煉 1 公斤的中草藥，每 5 公斤可製成 1 公斤的健康食品。中草藥每公斤可獲利 5000 元，健康食品每公斤可獲利 100 元；根據市場調查，每年中草藥最大需求量為 30 公斤，健康食品最大需求量是 1800 公斤。如果南北生技農場決定提煉中草藥 x 公斤，並製成健康食品 y 公斤，設 P 為其可獲利潤。

(1) 試以 x, y 表示 P 。(3 分)

(2) 如果想獲得最大利潤，則 x, y 的值為何？說明理由。(8 分)

二. 聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特 (W/m^2) 來衡量，一般人能感覺出聲音的最小強度為 $I_0 = 10^{-12} (W/m^2)$ ；當測得的聲音強度為 $I (W/m^2)$ 時，

所產生的噪音分貝數 d 為 $d(I) = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$

(1) 一隻蚊子振動翅膀測得的聲音強度為 $10^{-12} (W/m^2)$ ，求其產生的噪音分貝數。(2 分)

(2) 汽車製造廠測試發現，某新車以每小時 60 公里速度行駛時，測得的聲音強度為 $10^{-4} (W/m^2)$ ，問此聲音強度產生的噪音為多少分貝？(4 分)

(3) 棒球比賽場中，若一支瓦斯汽笛獨鳴，測得的噪音為 70 分貝，則百支瓦斯汽笛同時同地合鳴，被測得的噪音大約為多少分貝？(6 分)

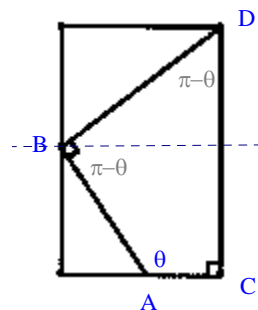
九十三學年度大學指定科目考試數學乙答案

第壹部分：選擇題（佔 77 分）

一、單一選擇題：（佔 28 分）

1. (2)

$$\overline{CD} = a \cdot \sin(\pi - \theta) + b \cdot \cos(\pi - \theta) = a \sin \theta - b \cos \theta$$



2. (1)

$$A(0, a), B(b, 0) \text{ 滿足 } a^2 + b^2 = t^2$$

$$\text{因 } \overline{AC} : \overline{CB} = 2 : 1 \Rightarrow C\left(\frac{2}{3}b, \frac{1}{3}a\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}b \\ y = \frac{1}{3}a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2}x \\ a = 3y \end{cases} \text{ 代入 } a^2 + b^2 = t^2 \Rightarrow \frac{9}{4}x^2 + 9y^2 = t^2$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 36y^2 = 4t^2 \text{ 圖形表一橢圓}$$

3. (4)

$$\text{設實際倍數為 } t \text{ 倍} \Rightarrow t^{0.7} = 10$$

$$\text{取對數 } 0.7 \log t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{0.7} = 1.428 \dots$$

$$\text{又 } \log 18 = \log 2 + 2 \log 3 = 1.2552, \log 21 = \log 3 + \log 7 = 1.3222,$$

$$\log 24 = 3 \log 2 + \log 3 = 1.3801, \log 27 = 3 \log 3 = 1.4313,$$

$$\log 36 = 2(\log 2 + \log 3) = 1.5562$$

故 t 最接近 27

4. (5)

(1) $P = \frac{1}{9}$ 為常數函數，顯然不對

(2) $P = \frac{1}{2} - \frac{1}{90}d$ 為線型函數，顯然不對

(3) $P = \frac{(d-5)^2}{60}$ 為對稱於 $d = 5$ 的二次函數，也不對

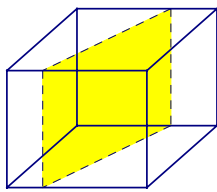
(4) $P = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^d$ 為 $r = \frac{1}{5}$ 的函數，觀察 d 之次數並非 $r = \frac{1}{5}$ 的形式，亦不對

(5) $P = \log\left(1 + \frac{1}{d}\right)$ 為遞減函數，當 d 越大，則下降越平緩，故接近圖形

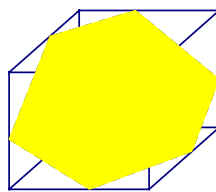
二、多重選擇題：(14 分)

5. (2) (4)

如圖一，截面為四邊形；如圖二，截面為六邊形



(圖一)



(圖二)

6. (1) (3)

甲方法中，每一位學生被抽到的機率均為 $\frac{1}{4}$

乙方法中，因「愛」班人數最多，故被抽中的同學為「愛」班者機率最高，即「愛」班同學被抽測的機率最高。

三、選填題 (35 分)

A. 2

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -a \\ \alpha\beta = a - 2 \end{cases} \Rightarrow |\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{a^2 - 4a + 8} = \sqrt{(a-2)^2 + 4} \geq 2$$

當 $a = 2$ 時 $|\alpha - \beta|$ 有最小值 (為 2)

B. 161

(男、女)：(4,4) 或 (3,5) 或 (2,6)

共有 $C_4^4 \cdot C_4^7 + C_3^4 \cdot C_5^7 + C_2^4 \cdot C_6^7 = 161$ 種

C. $\frac{1}{9}$

$$\frac{5 \cdot C_2^8 \cdot C_2^6 \cdot C_2^4 \cdot C_2^2}{C_2^{10} \cdot C_2^8 \cdot C_2^6 \cdot C_2^4 \cdot C_2^2} = \frac{1}{9}$$

D. $\frac{23}{8}$

設 $A(0,0,2), B(5,8,3), C(0,7,a)$

$$\overrightarrow{AB}: \begin{cases} x = 5u \\ y = 8u \\ z = 2 + u \end{cases} \quad u \in R, \text{ 過 } C \text{ 且平行 } x \text{ 軸的直線 } L: \begin{cases} x = t \\ y = 7 \\ z = a \end{cases} \quad t \in R$$

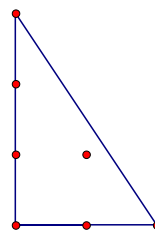
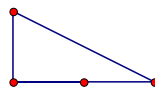
依題意 \overrightarrow{AB} 與 L 交於一點

$$\Rightarrow \begin{cases} 5u = t \\ 8u = 7 \\ 2 + u = a \end{cases}, \text{ 解得 } u = \frac{7}{8}, t = \frac{35}{8}, \text{ 故 } a = 2 + u = \frac{23}{8}$$

E. $(0.5, 1, -1)$

任意找三個三角形（如右圖），代入 $aS + bI + c$

$$\begin{aligned} a \cdot 3 + b \cdot 0 + c &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow a \cdot 4 + b \cdot 0 + c &= 1, \\ a \cdot 6 + b \cdot 1 + c &= 3 \end{aligned}$$



由(1)(2)式解得 $a = \frac{1}{2}, c = -1$ ，代入得 $b = 1$

第貳部分：非選擇題（佔 23 分）

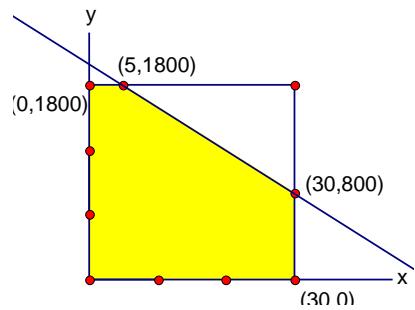
一. (1) $P = 5000x + 100y$

$$(2) \text{ 依題意 } (x, y) \text{ 滿足: } \begin{cases} 0 \leq x \leq 30 \\ 0 \leq y \leq 1800 \\ 200x + 5y \leq 10000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 30 \\ 0 \leq y \leq 1800 \\ 40x + y \leq 2000 \end{cases}$$

可行解區域如右圖

$P = 5000x + 100y$ 表斜率為 -50 的直線
在可行解區域平行移動到過 $(30,800)$ 時
有最大值

答：提煉中草藥 30 公斤，製成健康食品
800 公斤，可獲得最大利潤



二. (1) $d(10^{-12}) = 10 \cdot \log \frac{10^{-12}}{10^{-12}} = 0$ (分貝)

(2) $d(10^{-4}) = 10 \cdot \log \frac{10^{-4}}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^8 = 80$ (分貝)

(3) $70 = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow I = 10^{-5}$

百支的強度 $I = 100 \cdot 10^{-5} = 10^{-3}$

故噪音 = $d(10^{-3}) = 10 \cdot \log \frac{10^{-3}}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^9 = 90$ (分貝)