九十三學年度大學指定科目考試數學甲試題

第壹部分：（佔 **76** 分）

一、單選題（**6** 分）：

說明：第 1 題，每題選出最適當的一個選項，劃記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 6 分，答錯或劃記多於一個選項者倒扣 2 分，倒扣到本大題之實得分數為零為止。未作答者，不給分亦不扣分。

1. 設方程式$x^5=1$的五個根爲$1,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$，則

   $(3-\omega_1)(3-\omega_2)(3-\omega_3)(3-\omega_4)=$ (1) 81　(2) 162　(3) 121　(4) 242

二、多選題：（**32** 分）

說明：第 2 至 5 題，每題各有 4 個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題 8 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 2 分；每答錯一個選項，倒扣 2 分，完全答對得 8 分。整題未作答者，不給分亦不扣分。若在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣 2 分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。

2. 根據對數表，$\log 2$的近似值是 0.3010，$\log 3$的近似值是 0.4771。下列選項有哪些是正確的？ (1) $10^9>9^{10}$　(2) $10^{12}<12^{10}$　(3) $10^{11}>11^{10}$

   (4) 方程式$10^x=x^{10}$有一負根

3. 正四面體的四個頂落在以原點$O(0,0,0)$爲球心、半徑爲 1 的球面上，已知一頂點P的坐標爲$(0,0,1)$，另一頂點Q的坐標爲(a,b,c)。下列選項有哪些必定是正確的？

   (1) $\overleftrightarrow{OP}$與$\overleftrightarrow{OQ}$的夾角爲$120°$　(2) $a^2+b^2>c^2$　(3) $ab>0$　(4) $c<0$

4. 設$a>0$，令$A(a)$表示x軸、y軸、直線$x=a$與函數$y=2+\sin x$的圖形所圍成的面積。下列選項有哪些是正確的？

   (1) $A(a+2\pi)=A(a)$恆成立　(2) $A(2\pi)=2A(\pi)$

   (3) $A(4\pi)=2A(2\pi)$　(4) $A(3\pi)-A(2\pi)>A(2\pi)-A(\pi)$

5. 已知整係數多項式$f(x)$滿足$f(2)=f(4)=f(6)=0$，而且除了$x=2,4,6$之

外，$f(x)$ 的值恆正。下列選項有哪些必定是正確的？

(1) $f(x)$ 的次數至少爲 6　　(2) $f(x)$ 的次數爲奇數

(3) $f(1)$ 爲奇數　　(4) $f'(4)=0$

三、題組：（**22** 分）

說明：第 6 至 8 題為一完整之題組，請詳細閱讀得回答問題。第 6 題為單選題，第 7、8 兩題為多選題。其選項、作答、計分方式，與前面單選題和多選題之規定相同。

使用圓球和球袋作機率實驗。球只有黑白兩色，袋中裝有兩顆球，因此只有三種可能情況：把雙白球稱爲狀態 1，一黑球一白球稱爲狀態 2，雙黑球稱爲狀態 3。對這袋球做如下操作：自袋中隨機移走一球後，再隨機移入一顆白球或黑球（移入白球或黑球的機率相等）。每次操作可能會改變袋中球的狀態。

6. （單選題，6 分）如果現在袋子內的球是一白一黑（即狀態 2），請問經過一次操作後，袋中會變成兩顆黑球（狀態 3）的機率是多少？

(1) $\frac{1}{4}$　(2) $\frac{1}{3}$　(3) $\frac{1}{2}$　(4) $\frac{2}{3}$

把狀態 j 經過一次操作後會變成狀態 i 的機率記爲 p_{ij}（例如上題的機率就是 p_{32}），由此構成一 3×3 矩陣 P。

7. （多選題，8 分）針對矩陣 P，下列選項有哪些是正確的？

(1) 矩陣 P 滿足 $p_{ij}=p_{ji}$　　(2) P 是轉移矩陣（即每行之和皆爲 1）

(3) P 的行列式值爲正　　(4) $p_{11}=p_{33}$

把矩陣 P 連續自乘 k 次後的矩陣記爲 P^k。已知矩陣 P^k 中 (i, j) 位置的值，等於從狀態 j 經過 k 次操作後，變成狀態 i 的機率。

8. （多選題，8 分）針對多次操作，下列選項有哪些是正確的？

(1) 從一白一黑（狀態 2）開始，經過 k 次操作後，變成雙白（狀態 1）的機率與變成雙黑（狀態 3）的機率相等。

(2) 從雙白（狀態 1）開始，經過 k 次操作後，回到雙白（狀態 1）的機率

與變成雙黑（狀態 3）的機率大。

(3) 從雙白（狀態 1）開始，經過 k 次操作後，回到雙白（狀態 1）的機率會隨著次數 k 的增加而遞減。

(4) 不論從哪種狀態開始，經過 k 次操作後，變成任何一種狀態的機率，會隨著 k 趨近於無窮大而趨近於 $\frac{1}{3}$ 。

四、選填題（**16** 分）

說明：A、B 兩題為選填題，請在答案卡的「解答欄」之列號（9-13）。中標示答案。每題完全答對得 8 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 若坐標平面上滿足 $2x^2+axy+2y^2=1$ 上的點 (x,y)，都滿足 $x^2+y^2\le 1$，則 a 的最小值可能為 ＿9 10＿

B. 將 $\tan x = x$ 的所有正實根由小到大排列，得一無窮數列 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$，

則 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=$ ＿11 . 12 13＿ （四捨五入到小數第二位）

第貳部分：非選擇題（佔 **24** 分）

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號（一、二），同時必須寫出演算過程或理由，否則將酌予扣分。每題配分標於題末。

一. 若有 θ 使下述方程組不只一組解，求 $\sin\theta+\cos\theta$ 的值。（12 分）

$$\begin{cases}(1+\cos\theta)x-y=0\\ -x+(1+\sin\theta)y=0\end{cases}$$

二. 設 k 為一常數。已知一拋物線通過點 $(2,0)$ ，且焦點為 $(1,2)$ ，準線為 $kx+y+1=0$ ，求此拋物線頂點的坐標。（12 分）

九十三學年度大學指定科目考試數學甲答案

第壹部分：（佔 **76** 分）

一、單選題（**6** 分）：

1. (3)

$x^5-1=(x-1)(x-\omega_1)(x-\omega_2)(x-\omega_3)(x-\omega_4)$

$x=3$代入，$3^5-1=(3-1)(3-\omega_1)(3-\omega_2)(3-\omega_3)(3-\omega_4)$，

故所求為121

二、多選題：（**32** 分）

2. (3) (4)

(1) $9\cdot\log 10=9<10\cdot\log 9=20\cdot\log 3=9.542\Rightarrow 10^9<9^{10}$

(2) $12\cdot\log 10=12>10\cdot\log 12=10\cdot(2\log 2+\log 3)=10.791\Rightarrow 10^{12}>12^{10}$

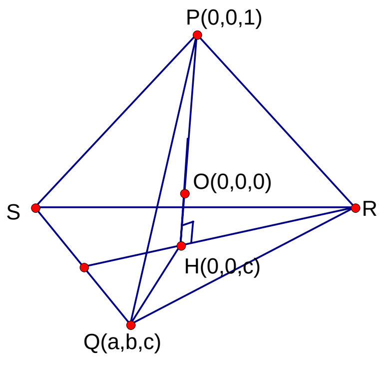
(3) $11\cdot\log 10=11>10\cdot\log 12=10.791>10\cdot\log 11\Rightarrow 10^{11}>12^{10}>11^{10}$

(4) 令 $f(x)=10^x-x^{10}$，因 $f(0)=1>0$ 且 $f(-1)=10^{-1}-1<0$

故存在實數 $a\in(-1,0)$ 使得 $f(a)=0$

即 $10^x=x^{10}$ 有一負根。

3. (2) (4)



正四面體 $P\text{-}QRS$ 落在以 $O(0,0,0)$ 為球心，半徑 $R=1$的球上，過 Q 做垂直 z 軸的平面，與 z 軸交於 $H(0,0,c)$，如圖，H 為正 ΔQRS 的中心，在直角 ΔPHQ 中，

$\overline{PQ}^2=\overline{PH}^2+\overline{HQ}^2=(1-c)^2+(a^2+b^2)$

又在等腰 ΔHQR 中，$\angle QHR=120°$

$\therefore \overline{RQ} = 2 \cdot \overline{HQ} \cdot \sin 60° = \sqrt{3(a^2+b^2)}$

$\because \overline{PQ}^2 = \overline{RQ}^2$，又 $\overline{OQ}^2 = a^2+b^2+c^2 = 1$，$\therefore (1-c)^2 + (a^2+b^2) = 3(a^2+b^2)$

$\Rightarrow (1-c)^2 + (1-c^2) = 3(1-c^2) \Rightarrow 3c^2 - 2c - 1 = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{3}$（1 不合）

$\overline{PQ} = \sqrt{3(1-c^2)} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

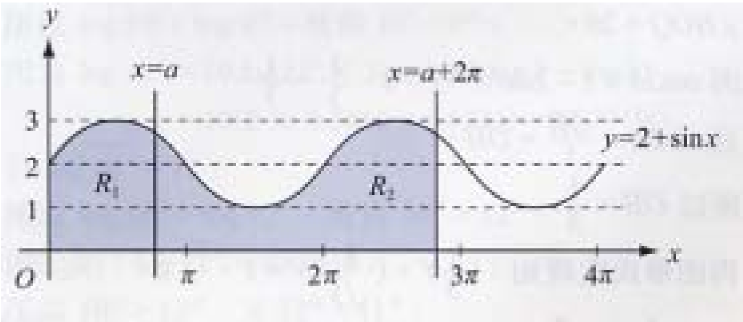
(1) $\angle POQ = \theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1^2+1^1-(\frac{2\sqrt{6}}{3})^2}{2\cdot 1\cdot 1} = -\frac{1}{3}$，故 $\theta \neq 120°$

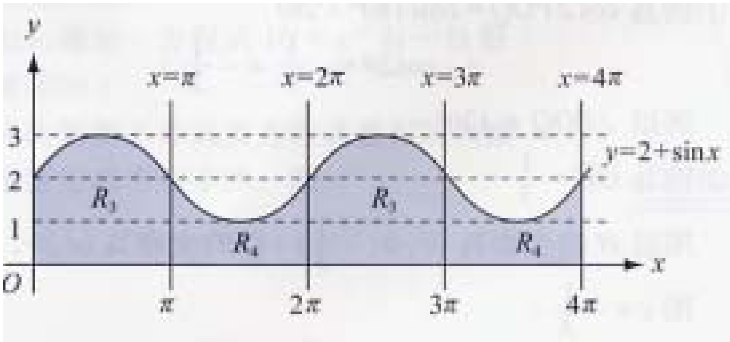
(2) $c = -\frac{1}{3} \Rightarrow a^2+b^2 = 1-c^2 = \frac{8}{9} > c^2 = \frac{1}{9}$

(3) $a^2+b^2 = \frac{8}{9}$，但 a,b 的正負未定，故 $ab>0$ 不一定成立。

(4) $c = -\frac{1}{3} < 0$

4. (3) (4)





由上面兩個圖觀察即可得知

A(a)=R_1，A(a+2π)=R_1+R_2，A(2π)=R_3+R_4，A(π)=R_3，

A(4π)=2R_3+2R_4，A(2π)=R_3+R_4

(1) $A(a+2\pi)>A(a)$

(2) $A(2\pi)<2A(\pi)$

(3) $A(4\pi)=2A(2\pi)$

(4) $A(3\pi)-A(2\pi)>A(2\pi)-A(\pi)$

5. (1) (4)

多項式 $f(x)$ 滿足 $f(2)=f(4)=f(6)=0$ 且其他 x 值均使 $f(x)>0$ 成立

故 $f(x)=(x-2)^2\cdot(x-4)^2\cdot(x-6)^2\cdot Q(x)$ ，其中 $\forall x\in R$ 均使 $Q(x)>0$

(1) $f(x)$ 的次數至少 6 次

(2) 因 $\forall x\in R$ 均使 $Q(x)>0$ ，即 $Q(x)$ 必爲偶次，故 $f(x)$ 不可能是奇次

(3) $f(1)=1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot Q(1)$，但因 $Q(1)$ 奇偶均有可能，故 $f(1)$ 不一定爲奇數。

(4) $f(x)=(x-4)^2\cdot P(x)\Rightarrow f'(x)=2(x-4)\cdot P(x)+(x-4)^2\cdot P'(x)$

，故 $f'(4)=0$

三、題組：（**22** 分）

6. (1)

$2\rightarrow 3$ 即袋中取出白球且放入黑球，其機率爲 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

7. (2) (4)

⤵	1	2	3
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}，\det(P)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=0$$

故知 P 爲一轉移矩陣，其行列式值爲 0，且 $p_{11}=p_{33}=\frac{1}{2}$，但不爲對稱矩陣。

8. (1) (2) (3)

$$P^k=\begin{bmatrix}\frac14+(\frac12)^{k+1} & \frac14 & \frac14-(\frac12)^{k+1}\\ \frac12 & \frac12 & \frac12\\ \frac14-(\frac12)^{k+1} & \frac14 & \frac14+(\frac12)^{k+1}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^k\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac14+(\frac12)^{k+1}\\ \frac12\\ \frac14-(\frac12)^{k+1}\end{bmatrix}，P^k\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac14\\ \frac12\\ \frac14\end{bmatrix}，P^k\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac14-(\frac12)^{k+1}\\ \frac12\\ \frac14+(\frac12)^{k+1}\end{bmatrix}$$

故(1) (2) (3)爲正確；(4)中不論何種情形，最後依狀態順序逼近$\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}$。

四、選填題（**16** 分）

A. -2

依題意可知$2x^2+axy+2y^2=1\cdots(1)$恆在$x^2+y^2=1\cdots(2)$的內部或相切

$(1)-(2)\Rightarrow x^2+axy+y^2=0$之判別式$\Delta=a^2-4\le 0$

$\Rightarrow -2\le a\le 2$，故a的最小值爲-2

B. 3.14

當$n\to\infty$時，$x_n\to(n-1)\pi+\frac{\pi}{2}$（漸近線）且$x_{n+1}\to n\pi+\frac{\pi}{2}$（漸近線）

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=\lim_{n\to\infty}\{(n\pi+\frac{\pi}{2})-[(n-1)\pi+\frac{\pi}{2}]\}=\pi\approx 3.14$$

第貳部分：非選擇題（佔 **24** 分）

一. $\begin{cases}(1+\cos\theta)x-y=0\\ -x+(1+\sin\theta)y=0\end{cases}$不止一組解$\Rightarrow\begin{vmatrix}1+\cos\theta & -1\\ -1 & 1+\sin\theta\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow \sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cdot\cos\theta=0\cdots\cdots(*)$

令$\sin\theta+\cos\theta=t$（其中$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$）且$\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$

$\Rightarrow (*)$式$=\frac{t^2-1}{2}+t=\frac{1}{2}(t^2+2t-1)=0\Rightarrow t=-1\pm\sqrt{2}$（負不合）

故$\sin\theta+\cos\theta=-1+\sqrt{2}$

二. 抛物線Γ的焦點$F(1,2)$，準線$L: kx+y+1=0$且$P(2,0)\in\Gamma$

由定義：$\overline{PF}=d(P,L)$

$$\Rightarrow \sqrt{(2-1)^2+(0-2)^2}=\frac{|2k+0+1|}{\sqrt{k^2+1}}$$

$$\Rightarrow 5(k^2+1)=4k^2+4k+1 \Rightarrow k=2$$

對稱軸過焦點F且垂直於準線L，可知軸

軸與準線交點$A(-1,1)$

$\overline{AF}$中點即爲頂點，故頂點爲$(0,\frac{3}{2})$