

九十五學年度指定科目數學甲考試試題

第壹部分：選擇題(佔 77 分)

一、單選題 (18 %)

1. 請問方程式 $(x^2+x+1)^3+1=0$ 有幾個相異實數根？
(1)0個 (2)1個 (3)2個 (4)3個 (5)6個。
2. 在坐標平面上，設P為 $y=2+x-x^2$ 圖形上一點。若P的x坐標為 $\log_3 10$ ，則P點的位置在
(1)第一象限 (2)第二象限 (3)第三象限 (4)第四象限 (5)坐標軸上。
3. 在坐標平面上給定兩點 A(1,3)與 B(5,6)。考慮坐標平面上的點集合
 $S=\{P|\Delta PAB \text{ 之面積為 } 10 \text{ 且周長為 } 15\}$ ，則
(1)S 為空集合 (2)S 恰含 2 個點 (3)S 恰含 4 個點 (4)S 為兩線段之聯集(5)S 為兩直線之聯集。

二、多選題 (24 %)

4. 擲一枚均勻硬幣 4 次，恰好出現 n 次正面的機率記為 a_n ；擲一枚均勻硬幣 8 次，恰好出現 n 次正面的機率記為 b_n 。試問以下哪些選項是正確的？
(1) $a_2=\frac{1}{2}$ (2) $a_2=b_4$ (3) $b_2=b_6$ (4) $a_3>b_3$ (5) $b_0, b_1, b_2, \dots, b_8$ 中最大值是 b_4 。
5. 在坐標平面上以 Γ 表示拋物線 $y=x^2$ 的圖形。試問以下哪些方程式的圖形可以由 Γ 經適當的平移或旋轉得到？
(1) $y=2x^2$ (2) $y=-x^2$ (3) $x=y^2$ (4) $y=x^2+4x+3$ (5) $(x+y)=(x-y)^2$ 。
6. 考慮多項式函數 $f(x)=x^5+2x^4-x^3-5x^2+3$ ，試問下列那些選項是正確的？
(1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(k)}{f(k+100)}=0$ (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$ (3)函數 f 在區間 $[\frac{1}{2}, 1]$ 遞增。
(4)若 $x \geq 0$ ，則 $f(x) \geq 0$ (5)在坐標平面上 $y=f(x)$ 的圖形與直線 $y=3$ 恰有兩個交點。

三、選填題 (35 %)

- A. 設 \vec{u} 、 \vec{v} 為兩非零向量，以 $|\vec{u}|$ 表示 \vec{u} 之長度，若 $|\vec{u}|=2|\vec{v}|=|2\vec{u}+3\vec{v}|$ ，且 θ 表示 \vec{u} 與 \vec{v} 的夾角，則 $\cos\theta=$ _____。
- B. 在坐標空間中，球面 S 交 xy 平面於一半徑為 $\sqrt{13}$ 、圓心為(2, 3, 0)的圓，且 S 通過點(6, 6, 6)，則 S 的半徑為_____。
- C. 設實係數二階方陣 A 滿足 $A \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ， $A \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ 。若 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ，則 $a=$ _____， $b=$ _____， $c=$ _____， $d=$ _____。
- D. 不透明箱內有編號分別為 1 至 9 的九個球，每次隨機取出一個，記錄其編號後放回箱內；以 $P(n)$ 表示前 n 次取球的編號之總和為偶數的機率。已知存在常數 r, s 使得 $P(n+1)=r+s \cdot P(n)$ 對任意正整數 n 都成立，則 $r=$ _____， $s=$ _____。

E. 以 O 表示坐標平面上的原點。給定一點 A(4,3)，而點 B(x,0)在正 x 軸上變動。若 $l(x)$ 表示 \overline{AB} 長，則 $\triangle OAB$ 中兩邊長比值 $\frac{x}{l(x)}$ 的最大值為_____。(化成最簡分數)

第貳部分：非選擇題（佔 23 分）

一、(1) (3 分) 將48510 分解成質因數的乘積。

(2) (7 分) 寫出在1 和250 之間且與48510 互質的所有合數(合數就是比1 大而不是質數的整數)。

二、.傳說中孫悟空的「如意金箍棒」是由「定海神針」變形得來的。這定海神針在變形時永遠保持為圓柱體，其底圓半徑原為12 公分且以每秒1 公分的等速率縮短，而長度以每秒20 公分的等速率增長。已知神針之底圓半徑只能從12公分縮到4 公分為止，且知在這段變形過程中，當底圓半徑為10 公分時其體積最大。

(1) (2 分) 試問神針在變形開始幾秒時其體積最大？

(2) (6 分) 試求定海神針原來的長度。

(3) (5 分) 假設孫悟空將神針體積最小時定形成金箍棒，試求金箍棒的長度。

九十五學年度指定科目數學甲考試試題答案

第壹部分：選擇題(佔 77 分)

一、單選題(18%)

1.(1) 2.(4) 3.(3)

二、多選題(24%)

4.(3)(4)(5) 5.(2)(3)(4) 6.(2)(4)(5)

三、選填題(35%)

A. $\frac{-7}{8}$ B. $\sqrt{29}$ C. $a=4, b=-3, c=-9, d=7$ D. $r=\frac{5}{9}, s=\frac{-1}{9}$ E. $\frac{5}{3}$

第貳部分：非選擇題(佔 23 分)

一、(1) $48510=2\times 3^2\times 5\times 7\times 11$

(2)169, 221, 247

二、(1)2 秒時體積最大

(2)60 公分

(3)220 公分