

九十六學年度指定科目數學甲考試試題

第壹部分：選擇題(佔 79 分)

一、單選題(18分)

1. 設 $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ ，試問複數 $1-z$ 的絕對值為以下哪一個選項？

- (1) $2\sin \frac{\pi}{7}$ (2) $\sin \frac{2\pi}{7}$ (3) $\sqrt{2}\sin \frac{2\pi}{7}$ (4) $\sqrt{2}(1-\cos \frac{2\pi}{7})$ (5) $\sqrt{1-\cos \frac{2\pi}{7}}$ 。

2. 試問下列有關極限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3-3x-x^2|-1}{x-1}$ 的敘述何者正確？

- (1) 極限不存在 (2) 極限為 0 (3) 極限為 1 (4) 極限為 5 (5) 極限為 2

3. 設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 是一等比數列，其首項 $a_1 > 1$ 且公比 $r > 1$ 。坐標平面上有一質點 M 自原點 $(0,0)$ 出發，依以下規則連續移動十次：第一次移動往右 $\log a_1$ 單位，第二次移動向上 $\log a_2$ 單位，第三次移動往右 $\log a_3$ 單位，第四次移動向上 $\log a_4$ 單位，依此類推直到第十次；即第 $2k-1$ 次的移動是往右 $\log a_{2k-1}$ 單位，接著第 $2k$ 次的移動是向上 $\log a_{2k}$ 單位。已知經過這十次的移動後，該質點 M 停在點 $(5+5\log 2, 5+\frac{15}{2}\log 2)$ 的位置上，試問首項 a_1 與公比 r 組成的序對 (a_1, r) 為以下哪一選項？

- (1) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (2) $(2\sqrt{2}, \sqrt{5})$ (3) $(2, \sqrt{2})$ (4) $(5, \sqrt{5})$ (5) $(5, \sqrt{2})$

二、多選題(40分)

4. 某校高三共有 300 位學生，數學科第一次段考、第二次段考成績分別以 X、Y 表示，且每位學生的成績用 0 至 100 評分。若這兩次段考數學科成績的相關係數為 0.016，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) X 與 Y 的相關情形可以用散佈圖表示
(2) 這兩次段考的數學成績適合用直線 $X=a+bY$ 表示 X 與 Y 的相關情形
(a, b 為常數， $b \neq 0$)
(3) $X+5$ 與 $Y+5$ 的相關係數仍為 0.016。
(4) $10X$ 與 $10Y$ 的相關係數仍為 0.016。

(5) 若 $X' = \frac{X - \bar{X}}{S_X}$ ， $Y' = \frac{Y - \bar{Y}}{S_Y}$ ，其中 \bar{X} 、 \bar{Y} 分別為 X、Y 的平均數， S_X 、 S_Y 分別為 X、Y 的標準差，則 X' 與 Y' 的相關係數仍為 0.016。

5. 設 $P(x)$ 是一個五次實係數多項式。若 $P(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式是 2，且商 $Q(x)$ 是一個係數均為正數的多項式，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $P(x)=0$ 與 $Q(x)=0$ 有共同的實根。
(2) 3 是 $P(x)=2$ 唯一的實根。
(3) $P(x)$ 不能被 $x-4$ 整除。
(4) $P(x)=0$ 一定有小於 3 的實根。
(5) $P(x)$ 除以 $(x-3)(x+3)$ 的餘式也是 2。

6. 設 a 是不為零的實數，且以下的三元一次方程組有解：

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} \\ \frac{y-5}{3} = z-4 \\ \frac{x}{a} = z-2 \\ \frac{y+1}{3} = z-2 \end{cases}, \text{試問下列哪些選項是正確的?}$$

(1) $a=2$ (2) 原方程組有唯一解。

(3) 方程組 $\begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} \\ \frac{x}{a} = z-2 \end{cases}$ 有無窮多解。

(4) 方程組 $\begin{cases} \frac{x}{a} = z-2 \\ \frac{y+1}{3} = z-2 \end{cases}$ 有唯一解。

(5) 方程組 $\begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} \\ \frac{y-5}{3} = z-4 \end{cases}$ 有無窮多解。

7. 有關矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 與矩陣 $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ，試問下列哪些選項是正確的？

(1) $AB=BA$ (2) $A^2B=BA^2$ (3) $A^{11}B^3=B^6A^5$ (4) $AB^{12}=A^7$ (5) $(ABA)^{15}=AB^{15}A$ 。

8. 考慮坐標平面上函數 $y=x^3+2x+3$ 的圖形 (x 為任意實數)，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) 圖形有最高點，也有最低點。
- (2) 圖形有水平切線。
- (3) 圖形與任一水平直線恰有一交點。
- (4) 若 (a,b) 在圖形上，則 $(-a,-b+6)$ 也在圖形上。
- (5) 圖形與三直線 $x=0$ 、 $x=1$ ； $y=0$ 所圍成的區域之面積大於 4。

三、選填題 (21分)

某公司共有 6 個工廠，各工廠的產量都一樣，且所生產的產品都放進同一倉庫

A. 中。由過去的經驗知道，第 k 個工廠的產品不良率為 $\frac{k}{50}$ ，其中 $k=1,2,3,4,5,6$ ，為了檢驗倉庫中這一批產品的品質，從倉庫中任意抽出一件，若為不良品，則此不良品是來自第

五個工廠的機率為 $\frac{\textcircled{9}}{\textcircled{10}\textcircled{11}}$ 。(化成最簡分數)

B. 在坐標平面上，一圓通過點 $(-2,7)$ ，且與直線 $4x+3y-14=0$ 相切於點 $(-1,6)$ ，若此圓的方程式為 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ，則 $a=$ ⑫⑬， $b=$ ⑭⑮， $c=$ ⑯。

C. 張師傅想為公司設計底面為正方形且沒有蓋子的一個長方體紙盒，裡面白色，外面灰色。在灰色部分的面積為432平方公分的限制之下，為了使紙盒的容量達到最大，他應將此無蓋長方體紙盒的底面每邊邊長設計為⑰⑱公分。

第貳部分：非選擇題（佔21分）

一、設 $f(x)=x^3-6x^2-x-30$ ，且 a,b 是方程式 $f(x)=0$ 的兩正根。

(1) (3分) 求解三次方程式 $f(x)=0$ 。

(2) (8分) 若 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AC}=a, \overline{BC}=b, \angle ACB=120^\circ$ ，且 $D、E$ 是 \overline{AB} 上兩點，

滿足 $\overline{BD}=\overline{BC}$ ， $\overline{AE}=\overline{AC}$ ，試求 $\triangle CDE$ 的面積。

二、設 $\triangle ABC$ 的三頂點分別為 $A(-2,7,15)、B(1,16,3)、C(10,7,3)$ 。

(1)(5分)試求通過 $A、B、C$ 三點的平面方程式。

(2)(5分)試求 $\triangle ABC$ 的外心坐標。

九十六學年度指定科目數學甲考試試題答案

第壹部分：選擇題(佔 79 分)

一、單選題(18%)

1.(1) 2.(4) 3.(5)

二、多選題(40%)

4.(1)(3)(4)(5) 5.(3)(4) 6.(2)(3)(5) 7.(2)(4)(5) 8.(3)(4)(5)

三、選填題(21%)

A. $\frac{5}{21}$ B. $a=10, b=-6, c=9$ C.12

第貳部分：非選擇題(佔 21%)

一、(1) $x=-2, 3, 5$

(2) $\frac{15\sqrt{3}}{28}$

二、(1) $x+y+z-20=0$

(2)(3,9,8)