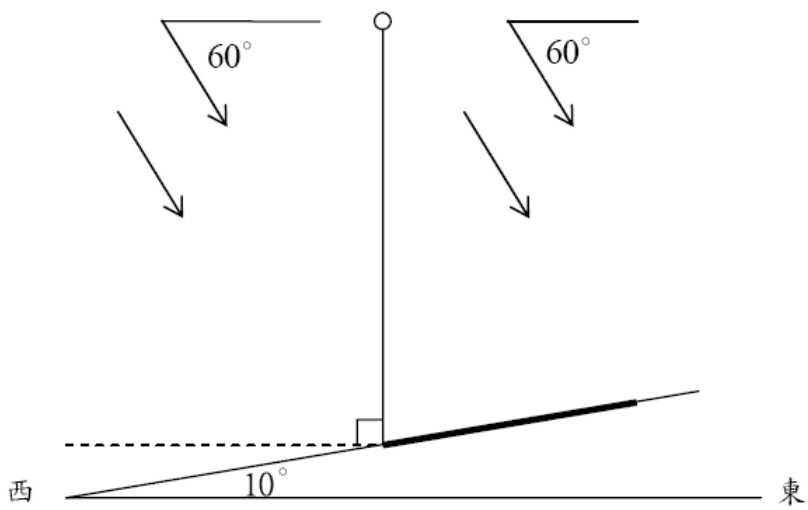
九十七學年度指定科目數學甲考試試題

第壹部分：選擇題(佔 74 分)

一、單選題（12分）

1. 已知正整數n可以寫成兩個整數的平方和。試問n除以 8 的餘數<u>不可能</u>爲以下那一個選項？
(1)1　(2)2　(3)4　(4)5　(5)6。

2. 在與水平面成 10˚的東西向山坡上，鉛直（即與水平面垂直）立起一根旗竿。當陽光從正西方以俯角 60˚平行投射在山坡上時，旗竿的影子長爲 11 公尺，如下圖所示（其中箭頭表示陽光投射的方向，而粗黑線段表示旗竿的影子）。



試問旗竿的長度最接近以下哪一個選項？
(1)19.1 公尺　(2)19.8 公尺　(3)20.7 公尺　(4)21.1 公尺　(5)21.7 公尺。

參考數值：

$\sin 10^\circ \approx 0.174$，$\sin 20^\circ \approx 0.342$，$\cos 10^\circ \approx 0.985$，$\cos 20^\circ \approx 0.940$，$\sqrt{3} \approx 1.732$。

二、多選題（48分）

3. 設A爲坐標平面上代表旋轉某個角度的二階方陣，且已知$A^6=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$。試問A可能是以下哪些選項中的方陣？

(1) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} \cos\frac{5\pi}{3} & -\sin\frac{5\pi}{3} \\ \sin\frac{5\pi}{3} & \cos\frac{5\pi}{3} \end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix} \cos\frac{5\pi}{6} & \sin\frac{5\pi}{6} \\ -\sin\frac{5\pi}{6} & \cos\frac{5\pi}{6} \end{bmatrix}$。

4. 甲、乙、丙三人參加一投擲公正銅板的遊戲，每一局三人各擲銅板 1 次；在某局中，當有一人投擲結果與其他二人不同時，此人就出局且遊戲終止；否則就進入下一局，並依前述規則繼續進行，直到有人出局爲止。試問下列哪些選項是正確的？

(1)第一局甲就出局的機率是$\frac{1}{3}$

(2)第一局就有人出局的機率是$\frac{1}{3}$

(3)第三局才有人出局的機率是$\frac{3}{64}$

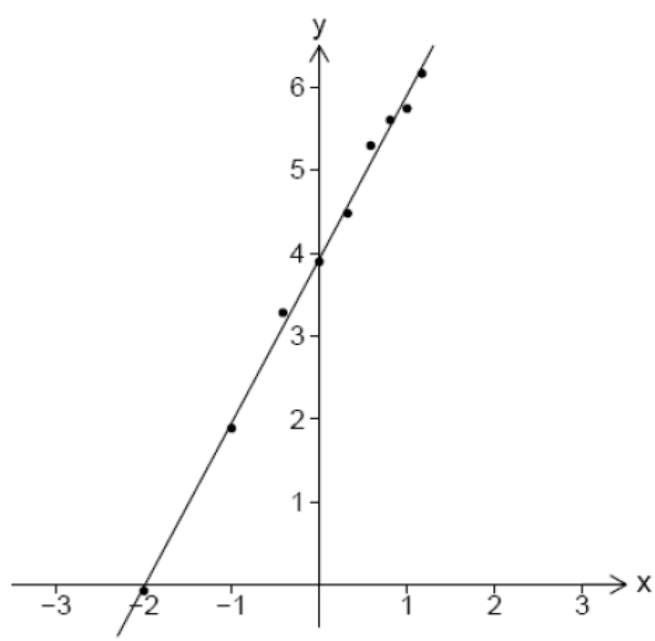
(4)已知第十局才有人出局，則甲出局的機率是$\frac{1}{3}$

(5)該遊戲在終止前，至少玩了六局的機率大於$\frac{1}{1000}$。

5. 某人進行一實驗來確定某運動之距離d與時間t的平方或立方成正比，所得數據如下：

時間 t (秒)	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25
距離 d (呎)	0.95	3.69	9.71	14.88	22.32	39.34	48.68	53.65	71.79

爲探索該運動的距離與時間之關係，令$x=\log_2 t$，$y=\log_2 d$，即將上述數據(t,d)分別取以 2 爲底的對數變換，例如：(2 , 53.65)變換成爲(2 , 5.74)。已知變換後的數據$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_9,y_9)$之散布圖及以最小平方法所求得變數$y$對變數$x$的最適合直線(或稱迴歸直線)爲$y=a+bx$，如下圖所示：



試問下列哪些選項是正確的？
(1)若d=14.88，則 $3<\log_2 d<4$
(2)x與y的相關係數小於 0.2
(3)由上圖可以觀察出$b>2.5$
(4)由上圖可以觀察出$a>2$
(5)由上圖可以確定此運動之距離與時間的立方約略成正比。

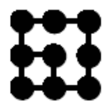
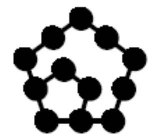
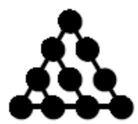
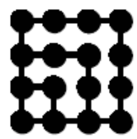
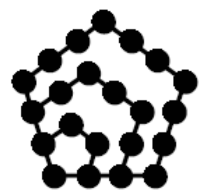
6. 設n爲正整數，方程式$x^2-2x-n=0$ 的兩根爲a_n與b_n，且$a_n>b_n$。試問下列哪些選項是正確的？
(1)$a_n>0$ 對所有n皆成立
(2)$a_n+b_n=2$ 對所有n皆成立
(3)$b_{n+1}>b_n$對所有n皆成立
(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n a_{n+1}}{n}=1$
(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-b_n}{\sqrt{n}}=2$。

7. 設$f'(x)$表示實係數多項式函數$f(x)$的導函數，已知$y=f'(x)$的圖形是一個通過點(1,0)和點(2,0)且開口向上的拋物線。試問下列哪些選項是正確的？
(1)$f(x)$一定是三次多項式
(2)$f(x)$在 $1<x<2$ 的範圍必爲遞增
(3)$f(x)$一定恰有兩個極值
(4)$f(x)=0$ 一定有三個實根
(5)$f(x)=0$ 在 $1\le x\le 2$ 的範圍內一定有實根。

8. 在坐標平面上，設拋物線Γ通過點(8,4)，且其對稱軸爲直線 $x-2=0$。試問下列選項哪些是正確的？
(1)若拋物線Γ的頂點坐標爲(2,1)，則其焦點坐標必爲(2,4)
(2)若拋物線Γ的焦點坐標爲(2,12)，則其頂點坐標必爲(2,3)
(3)若拋物線Γ也通過點(10,11)，則其準線方程式必爲 $y+6=0$
(4)直線 $x-2=0$ 上每一個點都可能是拋物線Γ的頂點
(5)直線 $x-2=0$ 上每一個點都可能是拋物線Γ的焦點。

三、選填題（14分）

A. 用大小一樣的鋼珠可以排成正三角形、正方形與正五邊形陣列，其排列的規律如下圖所示

	正三角形陣列	正方形陣列	正五邊形陣列
每邊1個鋼珠			
每邊2個鋼珠			
每邊3個鋼珠			
每邊4個鋼珠			

已知 m 個鋼珠恰好可以排成每邊 n 個鋼珠的正三角形陣列與正方形陣列各一個；且知若用這 m 個鋼珠去排每邊 n 個鋼珠的正五邊形陣列時，就會多出 9 個鋼珠。

則 n=＿＿⑨＿＿，m=＿＿⑩⑪⑫＿＿。

B. 若空間中一球面 S 與兩平面 $z=4$ 及 $z=8$ 相交的圓面積皆爲 36π，則 S 與平面 $z=7$ 相交的圓面積爲＿⑬⑭＿π。

第貳部分：非選擇題（佔 26 分）

一、(12分)設$p(x)$爲三次實係數多項式函數，其圖形通過$(1,3)$,$(-1,5)$兩點。若$p(x)$的圖形在點$(1,3)$的切線斜率爲7，而在點$(-1,5)$的切線斜率爲-5，試求 $p(x)$。

二、設ΔABC的三高分別爲$\overline{AD}=6$、$\overline{BE}=4$、$\overline{CF}=3$。

(1)(6分)試證：ΔABC是一個鈍角三角形。

(2)(8分)試求ΔABC的面積。

九十七學年度指定科目數學甲考試試題答案

第 壹 部 分 ： 選 擇 題 (佔 79 分)

一、單選題（12%）

1.(5)　2.(3)

二、多選題（40%）

3.(1)(3)(5)　4.(3)(4)　5.(1)(4)　6.(1)(2)(4)(5)　7.(1)(3)　8.(1)(3)(5)

三、選填題(21%)

A.n=9，m=126　B. 39

第貳部分：非選擇題（佔 21%）

一、$p(x)=x^3+3x^2-2x+1$

[提示]：設$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，利用$p'(1)=7$，$p'(-1)=-5$，$p(1)=3$，$p(-1)=5$ 解出a,b,c,d。

二、(1)$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{AC}=\frac{1}{3}:\frac{1}{6}:\frac{1}{4}=4:2:3$，再利用餘弦公式，可得$\cos C=\frac{-1}{4}<0$，故$\angle C$爲鈍角

故可得證ΔABC是一個鈍角三角形。

(2)$\frac{48}{\sqrt{15}}$