

2003年學科能力測驗數學考科

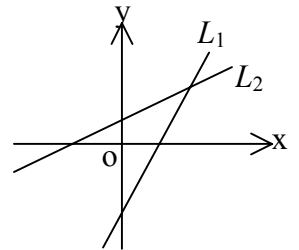
第一部分：選擇題

壹、單一選擇題(說明：第 1 至 5 題，每題選出最適當的一個選項，標示在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。)

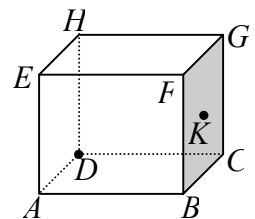
- 試問有多少個正整數 n 使得 $\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{10}{n}$ 為整數？_____。
(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 5 個
- 若 $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$ ，則多項式 $g(x) = f(f(x))$ 除以 $x - 2$ 所得的餘式為_____。
(1) 3 (2) 5 (3) 7 (4) 9 (5) 11
- 若 $(4 + 3i)(\cos \theta + i \sin \theta)$ 為小於 0 的實數，則 θ 是第幾象限角？_____。
(1) 第一象限角 (2) 第二象限角 (3) 第三象限角 (4) 第四象限角 (5) 條件不足，無法判斷
- 設 ABC 為坐標平面上一三角形， P 為平面上一點且 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ ，則 $\frac{\Delta ABP \text{面積}}{\Delta ABC \text{面積}}$ 等於_____。
(1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{2}{5}$ (4) $\frac{1}{2}$ (5) $\frac{2}{3}$
- 根據統計資料，在 A 小鎮當某件訊息發布後， t 小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的 $100(1 - 2^{-kt})\%$ ，其中 k 是某個大於 0 的常數。今有某訊息，假設在發布後 3 小時之內已經有 70% 的人口聽到該訊息。又設最快要 T 小時後，有 99% 的人口已聽到該訊息，則 T 最接近下列哪一個選項？_____。
(1) 5 小時 (2) $7\frac{1}{2}$ 小時 (3) 9 小時 (4) $11\frac{1}{2}$ 小時 (5) 13 小時

貳、多重選擇題(說明：第 6 至 11 題，每題至少有一個選項是正確的，選出正確選項，標示在答案卡之「解答欄」。每題答對得 5 分，答錯不倒扣，未答者不給分。只錯一個可獲 2.5 分，錯兩個或兩個以上不給分。)

- 如右圖，兩直線 L_1 、 L_2 之方程式分別為 $L_1: x + ay + b = 0$ ， $L_2: x + cy + d = 0$ ；試問下列哪些選項是正確的？_____。



- 如右圖， $ABCD-EFGH$ 為一平行六面體， K 為四邊形 $BCGF$ 的中心，如果 $\overrightarrow{AK} = a \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{AD} + c \cdot \overrightarrow{AE}$ ，試問下列哪些選項是正確的？_____。



- $\frac{1}{3} < b < \frac{2}{3}$ (2) $a + b + c = 2$ (3) $a = 1$ (4) $a = 2c$ (5) $a = b$
- 以下各數何者為正？_____。
(1) $\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}$ (2) $\log_2 3 - 1$ (3) $\log_3 2 - 1$ (4) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ (5) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$
- 下列哪些函數的最小正週期為 π ？_____。
(1) $\sin x + \cos x$ (2) $\sin x - \cos x$ (3) $|\sin x + \cos x|$ (4) $|\sin x - \cos x|$
(5) $|\sin x| + |\cos x|$
- 假設坐標平面上非空集合 S 內的點 (x, y) 具有以下性質：「若 $x > 0$ ，則 $y > 0$ 」。試問下列哪些敘述對 S 內的點 (x, y) 必定成立？_____。
(1) 若 $x \leq 0$ ，則 $y \leq 0$ (2) 若 $y \leq 0$ ，則 $x \leq 0$ (3) 若 $y > 0$ ，則 $x > 0$ (4) 若 $x > 1$ ，則 $y > 0$

(5) 若 $y < 0$ ，則 $x \leq 0$ 。

11. 設 $F_a: x - 4y + az = 10$ (a 為常數)、 $E_1: x - 2y + z = 5$ 及 $E_2: 2x - 5y + 4z = -3$ 為坐標空間中的三個平面。試問下列哪些敘述是正確的? _____。

- (1) 存在實數 a 使得 F_a 與 E_1 平行；
- (2) 存在實數 a 使得 F_a 與 E_1 垂直；
- (3) 存在實數 a 使得 F_a, E_1, E_2 交於一點；
- (4) 存在實數 a 使得 F_a, E_1, E_2 交於一直線；
- (5) 存在實數 a 使得 F_a, E_1, E_2 沒有共同交點。

第二部分：填充題(說明：1.第 A 至 I 題，將答案標示在答案卡之「解答欄」所標示的列號(12-34)。

2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。)

A. 設 a_1, a_2, \dots, a_{50} 是從 $-1, 0, 1$ 這三個整數中取值的數列。若 $a_1 + a_2 + \dots + a_{50} = 9$ 且 $(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 1)^2 + \dots + (a_{50} + 1)^2 = 107$ ，則 a_1, a_2, \dots, a_{50} 當中有幾項是 0？答：12 13 項。

B. 金先生在提款時忘了帳號密碼，但他還記得密碼的四位數字中，有兩個 3，一個 8，一個 9，於是他就用這四個數字隨意排成一個四位數輸入提款機嘗試。請問他只試一次就成功的機率有多少？

14
答：15 16。(化成最簡分數)

C. 設 $A(1, 0)$ 與 $B(b, 0)$ 為坐標平面上的兩點，其中 $b > 1$ 。若拋物線 $y^2 = 4x$ 上有一點 P 使得 $\triangle ABP$ 為一正三角形，則 $b =$ 17

D. 設 P 為雙曲線 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 上的一點且位在第一象限。若 F_1, F_2 為此雙曲線的兩個焦點，且

$\overline{PF_1} : \overline{PF_2} = 1 : 3$ ，則 $\triangle F_1PF_2$ 的周長等於 18 19

E. 在坐標空間中，通過 $O(0,0,0), N(0,0,1), P(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{11}}{4}, -\frac{1}{2})$ 三點的平面與球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 相交於一

個圓 C ，則圓 C 的劣弧 \widehat{NP} 的弧長等於 20 21 π (化成最簡分數)(所謂劣弧 \widehat{NP} 是指圓 C 上由 N ,

P 兩點所連接的兩弧中較短的那一段弧)

F. 設 k 為一整數。若方程式 $kx^2 + 7x + 1 = 0$ 有兩個相異實根，且兩根的乘積介於 $\frac{5}{71}$ 與 $\frac{6}{71}$ 之間，則 $k =$ 22 23

G. 在只有皮尺沒有梯子的情形下，想要測出一拋物線形拱門的高度。已知此拋物線以過最高點的鉛垂線為對稱軸。現甲、乙兩人以皮尺測得拱門底部寬為 6 公尺，且距底部 $\frac{3}{2}$ 公尺高處其寬為 5 公尺。利用這些數據可推算出拱門的高度為 24 25 26 27 公尺。(化成最簡分數)

H. 某次數學測驗共有 25 題單一選擇題，每題都有五個選項，每答對一題可得 4 分，答錯倒扣 1 分。某生確定其中 16 題可答對；有 6 題他確定五個選項中有兩個選項不正確，因此這 6 題他就從剩下的選項中分別猜選一個；另外 3 題只好亂猜，則他這次測驗得分之期望值為 28 29 分。(計算到整數為止，小數點以後四捨五入。)

I. 根據統計資料，1 月份台北地區的平均氣溫是攝氏 16 度，標準差是攝氏 3.5 度。一般外國朋友比較習慣用華氏溫度來表示冷熱，已知當攝氏溫度為 x 時，華氏溫度為 $y = \frac{9}{5}x + 32$ ；若用華氏溫度表

30 31 32

33 34

示，則 1 月份台北地區的平均氣溫是華氏
數點後第一位，以下四捨五入。)

度，標準差是華氏
度。(計算到小

2003年學科能力測驗數學考科參考答案：

第一部分：選擇題

壹、單一選擇題(每題答對得5分，答錯不倒扣)

1. 4 2. 5 3. 2 4. 3 5. 4

貳、多重選擇題(每題答對得5分，答錯不倒扣，只錯一個可獲得2.5分)

6. 4 5 7. 1234 8. 125 9. 34 10. 245 11. 235

第二部分：填充題(每題完全答對得5分，答錯不倒扣)

A. 11 B. $\frac{1}{12}$ C. 5 D. 22 E. $\frac{2}{3}\pi$ F. 12 G. $\frac{54}{11}$ H. 68 I. 60.8, 6.3