

# 2003年學科能力測驗數學考科

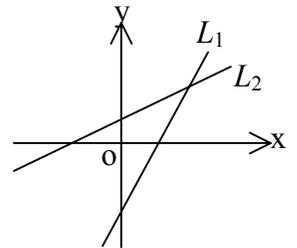
## 第一部分：選擇題

壹、單一選擇題(說明：第 1 至 5 題，每題選出最適當的一個選項，標示在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。)

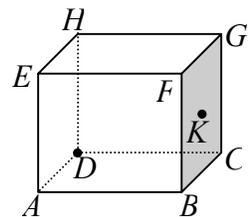
- 試問有多少個正整數  $n$  使得  $\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{10}{n}$  為整數？\_\_\_\_\_。  
(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 5 個
- 若  $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$ ，則多項式  $g(x) = f(f(x))$  除以  $x - 2$  所得的餘式為\_\_\_\_\_。  
(1) 3 (2) 5 (3) 7 (4) 9 (5) 11
- 若  $(4 + 3i)(\cos \theta + i \sin \theta)$  為小於 0 的實數，則  $\theta$  是第幾象限角？\_\_\_\_\_。  
(1) 第一象限角 (2) 第二象限角 (3) 第三象限角 (4) 第四象限角 (5) 條件不足，無法判斷
- 設  $ABC$  為坐標平面上三角形， $P$  為平面上一點且  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ ，則  $\frac{\Delta ABP \text{面積}}{\Delta ABC \text{面積}}$  等於\_\_\_\_\_。  
(1)  $\frac{1}{5}$  (2)  $\frac{1}{4}$  (3)  $\frac{2}{5}$  (4)  $\frac{1}{2}$  (5)  $\frac{2}{3}$
- 根據統計資料，在  $A$  小鎮當某件訊息發布後， $t$  小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的  $100(1 - 2^{-kt})\%$ ，其中  $k$  是某個大於 0 的常數。今有某訊息，假設在發布後 3 小時之內已經有 70% 的人口聽到該訊息。又設最快要  $T$  小時後，有 99% 的人口已聽到該訊息，則  $T$  最接近下列哪一個選項？\_\_\_\_\_。  
(1) 5 小時 (2)  $7\frac{1}{2}$  小時 (3) 9 小時 (4)  $11\frac{1}{2}$  小時 (5) 13 小時

貳、多重選擇題(說明：第 6 至 11 題，每題至少有一個選項是正確的，選出正確選項，標示在答案卡之「解答欄」。每題答對得 5 分，答錯不倒扣，未答者不給分。只錯一個可獲 2.5 分，錯兩個或兩個以上不給分。)

- 如右圖，兩直線  $L_1$ 、 $L_2$  之方程式分別為  $L_1: x + ay + b = 0$ ， $L_2: x + cy + d = 0$ ；試問下列哪些選項是正確的？\_\_\_\_\_。



- 如右圖， $ABCD-EFGH$  為一平行六面體， $K$  為四邊形  $BCGF$  的中心，如果  $\overrightarrow{AK} = a \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{AD} + c \cdot \overrightarrow{AE}$ ，試問下列哪些選項是正確的？\_\_\_\_\_。



- $\frac{1}{3} < b < \frac{2}{3}$  (2)  $a + b + c = 2$  (3)  $a = 1$  (4)  $a = 2c$  (5)  $a = b$
- 以下各數何者為正？\_\_\_\_\_。  
(1)  $\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}$  (2)  $\log_2 3 - 1$  (3)  $\log_3 2 - 1$  (4)  $\log_{\frac{1}{2}} 3$  (5)  $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$
- 下列哪些函數的最小正週期為  $\pi$ ？\_\_\_\_\_。  
(1)  $\sin x + \cos x$  (2)  $\sin x - \cos x$  (3)  $|\sin x + \cos x|$  (4)  $|\sin x - \cos x|$   
(5)  $|\sin x| + |\cos x|$
- 假設坐標平面上非空集合  $S$  內的點  $(x, y)$  具有以下性質：「若  $x > 0$ ，則  $y > 0$ 」。試問下列哪些敘述對  $S$  內的點  $(x, y)$  必定成立？\_\_\_\_\_。  
(1) 若  $x \leq 0$ ，則  $y \leq 0$  (2) 若  $y \leq 0$ ，則  $x \leq 0$  (3) 若  $y > 0$ ，則  $x > 0$  (4) 若  $x > 1$ ，則  $y > 0$

(5) 若  $y < 0$ ，則  $x \leq 0$ 。

11. 設  $F_a: x - 4y + az = 10$  ( $a$  為常數)、 $E_1: x - 2y + z = 5$  及  $E_2: 2x - 5y + 4z = -3$  為坐標空間中的三個平面。試問下列哪些敘述是正確的? \_\_\_\_\_。

- (1) 存在實數  $a$  使得  $F_a$  與  $E_1$  平行；
- (2) 存在實數  $a$  使得  $F_a$  與  $E_1$  垂直；
- (3) 存在實數  $a$  使得  $F_a, E_1, E_2$  交於一點；
- (4) 存在實數  $a$  使得  $F_a, E_1, E_2$  交於一直線；
- (5) 存在實數  $a$  使得  $F_a, E_1, E_2$  沒有共同交點。

第二部分：填充題(說明：1.第 A 至 I 題，將答案標示在答案卡之「解答欄」所標示的列號(12-34)。

2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。)

A. 設  $a_1, a_2, \dots, a_{50}$  是從  $-1, 0, 1$  這三個整數中取值的數列。若  $a_1 + a_2 + \dots + a_{50} = 9$  且  $(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 1)^2 + \dots + (a_{50} + 1)^2 = 107$ ，則  $a_1, a_2, \dots, a_{50}$  當中有幾項是 0？答：12 13 項。

B. 金先生在提款時忘了帳號密碼，但他還記得密碼的四位數字中，有兩個 3，一個 8，一個 9，於是他就用這四個數字隨意排成一個四位數輸入提款機嘗試。請問他只試一次就成功的機率有多少？

14  
答：15 16。(化成最簡分數)

C. 設  $A(1, 0)$  與  $B(b, 0)$  為坐標平面上的兩點，其中  $b > 1$ 。若拋物線  $y^2 = 4x$  上有一點  $P$  使得  $\triangle ABP$  為一正三角形，則  $b =$  17

D. 設  $P$  為雙曲線  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  上的一點且位在第一象限。若  $F_1, F_2$  為此雙曲線的兩個焦點，且

$\overline{PF_1} : \overline{PF_2} = 1 : 3$ ，則  $\triangle F_1PF_2$  的周長等於 18 19

E. 在坐標空間中，通過  $O(0,0,0), N(0,0,1), P(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{11}}{4}, -\frac{1}{2})$  三點的平面與球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  相交於一

個圓  $C$ ，則圓  $C$  的劣弧  $\widehat{NP}$  的弧長等於 20 21  $\pi$  (化成最簡分數)(所謂劣弧  $\widehat{NP}$  是指圓  $C$  上由  $N$ ，

$P$  兩點所連接的兩弧中較短的那一段弧)

F. 設  $k$  為一整數。若方程式  $kx^2 + 7x + 1 = 0$  有兩個相異實根，且兩根的乘積介於  $\frac{5}{71}$  與  $\frac{6}{71}$  之間，則  $k =$  22 23

G. 在只有皮尺沒有梯子的情形下，想要測出一拋物線形拱門的高度。已知此拋物線以過最高點的鉛垂線為對稱軸。現甲、乙兩人以皮尺測得拱門底部寬為 6 公尺，且距底部  $\frac{3}{2}$  公尺高處其寬為 5 公尺。利用這些數據可推算出拱門的高度為 24 25 26 27 公尺。(化成最簡分數)

H. 某次數學測驗共有 25 題單一選擇題，每題都有五個選項，每答對一題可得 4 分，答錯倒扣 1 分。某生確定其中 16 題可答對；有 6 題他確定五個選項中有兩個選項不正確，因此這 6 題他就從剩下的選項中分別猜選一個；另外 3 題只好亂猜，則他這次測驗得分之期望值為 28 29 分。(計算到整數為止，小數點以後四捨五入。)

I. 根據統計資料，1 月份台北地區的平均氣溫是攝氏 16 度，標準差是攝氏 3.5 度。一般外國朋友比較習慣用華氏溫度來表示冷熱，已知當攝氏溫度為  $x$  時，華氏溫度為  $y = \frac{9}{5}x + 32$ ；若用華氏溫度表

30 31 32

33 34

示，則 1 月份台北地區的平均氣溫是華氏  
數點後第一位，以下四捨五入。)

度，標準差是華氏  
度。(計算到小

# 2003年學科能力測驗數學考科參考答案：

第一部分：選擇題

壹、單一選擇題(每題答對得5分，答錯不倒扣)

1. 4 2. 5 3. 2 4. 3 5. 4

貳、多重選擇題(每題答對得5分，答錯不倒扣，只錯一個可獲得2.5分)

6. 4 5 7. 1234 8. 125 9. 34 10. 245 11. 235

第二部分：填充題(每題完全答對得5分，答錯不倒扣)

A. 11 B.  $\frac{1}{12}$  C. 5 D. 22 E.  $\frac{2}{3}\pi$  F. 12 G.  $\frac{54}{11}$  H. 68 I. 60.8, 6.3