2005 年學科能力測驗

第一部份：選擇題

壹、單選題

1. 試問整數 43569 共有多少個不同的質因數？
(1)1 個 (2)2 個 (3)3 個 (4)4 個 (5)5 個。

2. 利用公式 $1^3+2^3+\ldots+n^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$，可計算$(11)^3+(12)^3+\ldots+(20)^3$之值為
(1)41075 (2)41095 (3)41115 (4)41135 (5)41155。

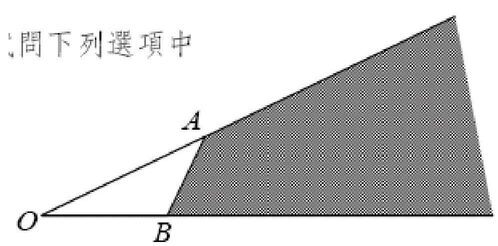
3. 台北銀行最早發行的樂透彩(俗稱小樂透)的玩法是「42 選 6」：購買者從 01~42 中任選六個號碼，當這六個號碼與開出的六個號碼完全相同(不計次序)時即得頭獎；台北銀行曾考慮改發行「39 選 5」的小小樂透：購買者從 01~39 中任選五個號碼，當這五個號碼與開出的五個號碼完全相同(不計次序)時即得頭獎。假設原來的小樂透中頭獎的機率是 R，而曾考慮發行的小小樂透中頭獎的機率是 r。試問比值$\frac{r}{\mathrm{R}}$最接近下列那一個選項？
(1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11。

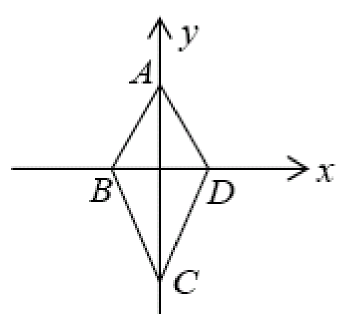
4. 設a,b為實數，已知$\log_7 a=11,\log_7 b=13$；試問$\log_7(a+b)$之值最接近下列那個選項？
(1)12 (2)13 (3)14 (4)23 (5)24。

5. 某校高一第一次段考數學成績不太理想，多數同學成績偏低；考慮到可能是同學們適應不良所致，數學老師決定將每人的原始成績取平方根後再乘以 10 作為正式紀錄的成績。今隨機抽選 100 位同學，發現調整後的成績其平均為 65 分，標準差為 15 分；試問這 100 位同學未調整前的成績之平均 M 介於哪兩個連續正整數之間？(第 7 頁附有標準差公式)
. (1) $40\le M<41$ (2) $41\le M<42$ (3) $42\le M<43$ (4) $43\le M<44$ (5) $44\le M<45$

貳、多選題

6. 如右圖所示，兩射線OA與OB交於O點，
試問下列選項中那些向量的終點會落在陰影區域內？
(1)$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (2)$\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (3)$\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
(4)$\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (5)$\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$





7. 如右圖所示，坐標平面上一鳶形ABCD，其中A,C在y軸上，B,D在x軸上，且$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}=2$，$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}=4$，$\overline{\mathrm{AC}}=5$。令$m_{\mathrm{AB}}$、$m_{\mathrm{BC}}$、$m_{\mathrm{CD}}$、$m_{\mathrm{DA}}$分別表示直線AB、BC、CD、DA之斜率。試問以下那些敘述成立？
(1)此四數值中以m_{AB}為最大。

(2)此四數值中以m_{BC}爲最小。
(3)$m_{BC}=-m_{CD}$
(4)$m_{AB}\times m_{BC}=-1$
(5)$m_{CD}+m_{DA}>0$

8. 假設坐標空間中三相異平面E_1、E_2、E_3皆通過(–1,2,0)與(3,0,2)兩點，試問以下那些點也同時在此三平面上？
(1)(2,2,2) (2)(1,1,1) (3)(4,–2,2) (4)(–2,4,0) (5)(–5,–4,–2)。

9. 若 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，試問下列那些選項恆成立？
(1)$\sin\theta<\cos\theta$ (2)$\tan\theta<\sin\theta$ (3)$\cos\theta<\tan\theta$ (4)$\sin2\theta<\cos2\theta$ (5)$\tan\frac{\theta}{2}<\frac{1}{2}\tan\theta$ 。

10. 設F_1與F_2爲坐標平面上雙曲線Γ：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的兩個焦點，P爲Γ上一點，使得此三點構成一等腰三角形。試問以下那些值可能是這些等腰三角形的周長？
(1)20 (2)24 (3)28 (4)32 (5)36。

11. 設 S 爲空間中一球面，$\overline{AB}$爲其一直徑，且$\overline{AB}=10$。若 P 爲空間中一點，使得$\overline{PA}+\overline{PB}=14$，則 P 點的位置可能落在那裡？

(1)線段$\overline{AB}$；

(2)直線 AB 上，但不在線段$\overline{AB}$上；
(3)球面 S 上；

(4)球 S 的內部，但不在線段$\overline{AB}$上；
(5)球 S 的外部，但不在直線 AB 上。

第二部份：填充題

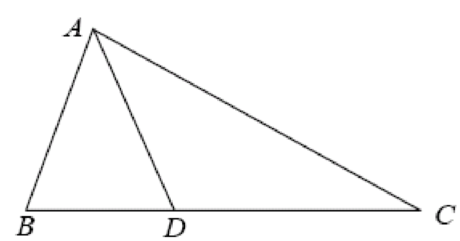
A. 若多項式x^2+x+2 能整除$x^5+x^4+x^3+px^2+2x+q$，則$p=$_____ $q=$_____ 。

B. 在坐標平面上，正方形 ABCD 的四個頂點坐標分別爲 A(0,1)、B(0,0)、C(1,0)、D(1,1)。設 P 爲正方形 ABCD 內部一點，若ΔPDA 與ΔPBC 的面積比爲 1：2 且ΔPAB 與ΔPCD 的面積比爲 2：3，則 P 點的坐標爲_________ 。(化成最簡分數)

C. 在數線上有一個運動物體從原點出發，在此數線上跳動，每次向正方向或負方向跳 1 單位，跳動過程可重複經過任何一點。若經過 6 次跳動後運動物體落在點+4 處，則此運動物體共有______種不同的跳動方法。

D. 設複數$z=1-i$；若 $1+z+z^2+\ldots+z^9=a+bi$，其中a,b爲實數，則$a=$______ ，$b=$_____ 。

E. 設O爲坐標平面上的原點，P點坐標爲(2,1)；若A、B分別是正x軸及正y軸上的點，使得$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$ ，則ΔOAB面積的最大可能值爲_______ 。(化成最簡分數)

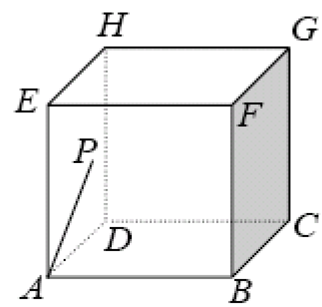


F. 如右圖所示，在ΔABC 中，∠BAC 的平分線 AD 交對邊$\overline{BC}$於 D；已知$\overline{BD}$=3，$\overline{DC}$=6，且$\overline{AB}$=$\overline{AD}$，則 cos∠BAD 之值為________。(化成最簡分數)

G. 在坐標平面上，過F(1,0)的直線交拋物線Γ：$y^2=4x$於P、Q兩點，其中P在上半平面，且知$2\overline{PF}=3\overline{QF}$，則P點的$x$坐標為________。(化成最簡分數)

H. 設x為一正實數且滿足$x\cdot 3^x=3^{18}$；若x落在連續正整數k與k+1 之間，則k=_____。

I. 如右圖所示，ABCD−EFGH為邊長等於 1 之正立方體。若P點在立方體之內部且滿足$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$，則P點至直線AB之距離為________。(化成最簡分數)



參考公式及可能用到的數值

1. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
2. 平面上兩點 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 間的距離為 $\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
3. 通過 (x_1,y_1) 與 (x_2,y_2) 的直線斜率為 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，$x_2\neq x_1$
4. 等比數列＜$a\cdot r^{n-1}$＞的前 n 項之和 $S_n=\dfrac{a\cdot(1-r^n)}{1-r}$，$r\neq 1$
5. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，$\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$
6. ΔABC 的正弦定理：$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$

   ΔABC 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$
7. 棣美弗定理：設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，則 $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$， n 為一正整數
8. 算術平均數： $M(=\overline{X})=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

   (樣本)標準差：$S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}((\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2})-n\overline{X}^2)}$
9. 參考數值： $\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\pi\approx 3.142$
10. 對數值： $\log_{10}2\approx 0.3010$，$\log_{10}3\approx 0.4771$，$\log_{10}5\approx 0.6990$，$\log_{10}7\approx 0.8451$

2005 年學科能力測驗數學考科

選擇題：1.(3)　2.(1)　3.(4)　4.(2)　5.(5)　6.(1)(2)　7.(2)(3)(5)　8.(2)　9.(1)(5)　10.(2)(5)
11.(2)(3)(4)(5)

填充題：A. $p=3$, $q=8$　B. $(\frac{2}{5},\frac{2}{3})$　C. 6　D. $a=32$, $b=-1$　E. $\frac{25}{16}$　F. $\frac{3}{4}$　G. $\frac{3}{2}$　H. 15　I. $\frac{5}{6}$