

2007 年學科能力測驗

第一部份：選擇題

壹、單選題

1. 設 $f(x)=ax^6-bx^4+3x-\sqrt{2}$ ，其中 a,b 為非零實數，則 $f(5)-f(-5)$ 之值為
(1)-30 (2)0 (3) $2\sqrt{2}$ (4)30 (5)無法確定(與 a,b 有關)
2. 試問共有多少個正整數 n 使得坐標平面上通過點 $A(-n,0)$ 與點 $B(0,2)$ 的直線亦通過點 $P(7,k)$ ，其中 k 為某一個正整數？
(1)2 個 (2)4 個 (3)6 個 (4)8 個 (5)無窮多個。
3. 設某沙漠地區某一時間的溫度函數為 $f(t)=-t^2+10t+11$ ，其中 $1\leq t\leq 10$ ，則這段時間內該地區的最大溫差為 (1)9 (2)16 (3)20 (4)25 (5)36。
4. 坐標平面上方程式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的圖形與 $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的圖形共有幾個交點？
(1)1 個 (2)2 個 (3)3 個 (4)4 個 (5)0 個。
5. 關於坐標平面上函數 $y=\sin x$ 的圖形和 $y=\frac{x}{10\pi}$ 的圖形之交點個數，下列那一個選項是正確的？
(1)交點的個數是無窮多
(2)交點的個數是奇數且大於 20
(3)交點的個數是奇數且小於 20
(4)交點的個數是偶數且大於或等於 20
(5)交點的個數是偶數且小於 20

貳、多選題

6. 若 $\Gamma=\{z|z \text{ 為複數且 } |z-1|=1\}$ ，則下列那些點會落在圖形 $\Omega=\{w|w=iz, z\in\Gamma\}$ 上？
(1) $2i$ (2) $-2i$ (3) $1+i$ (4) $1-i$ (5) $-1+i$ 。
7. 坐標平面上有相異兩點 P 、 Q ，其中 P 點的坐標為 (s,t) 。已知線段 \overline{PQ} 的中垂線 L 的方程式為 $3x-4y=0$ ，試問下列那些選項是正確的？
(1)向量 \overrightarrow{PQ} 與向量 $(3,-4)$ 平行
(2)線段 \overline{PQ} 的長度等於 $\frac{|6s-8t|}{5}$
(3) Q 點的坐標為 (t,s)
(4)過 Q 點與直線 L 平行之直線必過點 $(-s,-t)$
(5)以 O 表示原點，則向量 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ 與向量 \overrightarrow{PQ} 的內積比為 0

8. 下列那些選項中的矩陣經過一系列的列運算後可以化成 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。

9. 坐標空間中，在 xy 平面上置有三個半徑為 1 的球兩兩相切，設其球心分別為 A、B、C。今將第四個半徑為 1 的球置於這三個球的上方，且與這三個球都相切，並保持穩定。設第四個球的球心為 P，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) 點 A、B、C 所在的平面和 xy 平面平行
- (2) 三角形 ABC 是一個正三角形
- (3) 三角形 PAB 有一邊長為 $\sqrt{2}$
- (4) 點 P 到直線 AB 的距離為 $\sqrt{3}$
- (5) 點 P 到 xy 平面的距離為 $1+\sqrt{3}$

10. 設 a 為大於 1 的實數，考慮函數 $f(x)=a^x$ 與 $g(x)=\log_a x$ ，試問下列那些選項是正確的？

- (1) 若 $f(3)=6$ ，則 $g(36)=6$
- (2) $\frac{f(238)}{f(219)} = \frac{f(38)}{f(19)}$
- (3) $g(238)-g(219)=g(38)-g(19)$
- (4) 若 P、Q 為 $y=g(x)$ 的圖形上兩相異點，則直線 PQ 之斜率必為正數
- (5) 若直線 $y=5x$ 與 $y=f(x)$ 的圖形有兩個交點，則直線 $y=\frac{1}{5}x$ 與 $y=g(x)$ 的圖形也有兩個交點。

11. 設 $f(x)$ 為一實係數三次多項式且最高次項係數為 1，已知 $f(1)=1$ ， $f(2)=2$ ， $f(5)=5$ ，則 $f(x)=0$ 在下列那些區間必定有實根？

- (1) $(-\infty, 0)$ (2) $(0, 1)$ (3) $(1, 2)$ (4) $(2, 5)$ (5) $(5, \infty)$

第二部份：填充題

A. 設實數 x 滿足 $0 < x < 1$ ，且 $\log_x 4 - \log_2 x = 1$ ，則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化成最簡分數)

B. 在坐標平面上的 $\triangle ABC$ 中，P 為 \overline{BC} 邊之中點，Q 在 \overline{AC} 邊上且 $\overline{AQ} = 2\overline{QC}$ 。已知 $\overrightarrow{PA} = (4, 3)$ ， $\overrightarrow{PQ} = (1, 5)$ ，則 $\overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

C. 在某項才藝競賽中，為了避免評審個人主觀影響參賽者成績太大，主辦單位規定：先將 15 位評審給同一位參賽者的成績求得算術平均數，再將與平均數相差超過 15 分的評審成績剔除後重新計算平均值做為此參賽者的比賽成績。現在有一位參賽者所獲 15 位評審的平均成績為 76 分，其中三位評審給的成績 92、45、55 應剔除，則這個參賽者的

比賽成績為_____分。

- D. 某巨蛋球場 E 區共有 25 排座位，此區每一排都比其前一排多 2 個座位。小明坐在正中間那一排(即第 13 排)，發現此排共有 64 個座位，則此球場 E 區共有_____個座位。
- E. 設 P、A、B 為坐標平面上以原點為圓心的單位圓上三點，其中 P 點坐標為(1,0)，A 點坐標為 $(\frac{-12}{13}, \frac{5}{13})$ ，且 $\angle APB$ 為直角，則 B 點的坐標為_____。(化成最簡分數)
- F. 某公司生產多種款式的「阿民」公仔，各種款式只是球帽、球衣或球鞋顏色不同。其中球帽共有黑、灰、紅、藍四種顏色，球衣有白、綠、藍三種顏色，而球鞋有黑、白、灰三種顏色。公司決定紅色的球帽不搭配灰色的鞋子，而白色的球衣則必須搭配藍色的帽子，至於其他顏色間的搭配就沒有限制。在這些配色的要求之下，最多可有_____種不同款式的「阿民」公仔。
- G. 摸彩箱裝有若干編號為 1, 2, ...10 的彩球，其中各種編號的彩球數目可能不同。今從中隨機摸取一球，依據所取球的號數給予若干報酬。現有甲、乙兩案：甲案為當摸得彩球的號數為 k 時，其所獲報酬同為 k ；乙案為當摸得彩球的號數為 k 時，其所獲報酬為 $11-k$ ($k=1, 2, \dots, 10$)。已知依甲案每摸取一球的期望值為 $\frac{67}{14}$ ，則依乙案每摸取一球的期望值為_____。(化成最簡分數)
- H. 坐標平面上有一以點 V(0,3)為頂點、F(0,6)為焦點的拋物線。設 P(a,b)為此拋物線上一點，Q(a,0)為 P 在 x 軸上的投影，滿足 $\angle FPQ=60^\circ$ ，則 $b=_____$ 。
- I. 在 $\triangle ABC$ 中，M 為 \overline{BC} 邊之中點，若 $\overline{AB}=3$ ， $\overline{AC}=5$ ，且 $\angle BAC=120^\circ$ ，則 $\tan\angle BAM=_____$ 。

2007 年學科能力測驗答案

第一部份：選擇題

壹、單選題

1.(4) 2.(2) 3.(4) 4.(1) 5.(3)

貳、多選題

6.(1)(3)(5) 7.(1)(2)(4)(5) 8.(1)(5) 9.(1)(2)(4) 10.(1)(2)(4)(5)

11.(2)(4)

第二部份：填充題

A. $\frac{1}{4}$ B. (-1,12) C. 79 D. 1600 E. $(\frac{12}{13}, \frac{-5}{13})$ F. 25 G. $\frac{87}{14}$ H. 12 I. $5\sqrt{3}$