

2008年學科能力測驗

第一部份：選擇題

壹、單選題

1. 對任意實數 x 而言， $27^{(x^2+\frac{2}{3})}$ 的最小值為
(1)3 (2) $3\sqrt{3}$ (3)9 (4)27 (5) $81\sqrt{3}$
2. 在職棒比賽中ERA 值是了解一個投手表現的重要統計數值。其計算方式如下：若此投手共主投 n 局，其總責任失分為 E ，則其ERA 值為 $\frac{E}{n} \times 9$ 。有一位投手在之前的比賽中共主投了90局，且這90局中他的ERA 值為3.2。在最新的一場比賽中此投手主投6局無責任失分，則打完這一場比賽後，此投手的ERA 值成爲
(1) 2.9 (2) 3.0 (3) 3.1 (4) 3.2 (5) 3.3
3. 有一個圓形跑道分內、外兩圈，半徑分別爲30、50公尺。今甲在內圈以等速行走、乙在外圈以等速跑步，且知甲每走一圈，乙恰跑了兩圈。若甲走了45公尺，則同時段乙跑了
(1) 90公尺 (2) 120公尺 (3) 135公尺 (4) 150公尺 (5) 180公尺
4. 某地區的車牌號碼共六碼，其中前兩碼爲O 以外的英文大寫字母，後四碼爲0 到9 的阿拉伯數字，但規定不能連續出現三個4。例如：AA1234, AB4434 爲可出現的車牌號碼；而AO1234, AB3444 爲不可出現的車牌號碼。則所有第一碼爲A 且最後一碼爲4 的車牌號碼個數爲
(1) 25×9^3 (2) $25 \times 9^2 \times 10$ (3) 25×900 (4) 25×990 (5) 25×999
5. 廣場上插了一支紅旗與一支白旗，小明站在兩支旗子之間。利用手邊的儀器，小明測出他與正東方紅旗間的距離爲他與正西方白旗間距離的6 倍；小明往正北方走了10 公尺之後再測量一次，發現他與紅旗的距離變成他與白旗距離的4 倍。試問紅白兩旗之間的距離最接近下列哪個選項？
(1) 60 公尺 (2) 65 公尺 (3) 70 公尺 (4) 75 公尺 (5) 80 公尺

貳、多選題

6. 試問：在坐標平面上，下列哪些選項中的函數圖形完全落在 x 軸上方？
(1) $y=x+100$ (2) $y=x^2+1$ (3) $y=2+\sin x$ (4) $y=2^x$ (5) $y=\log x$
7. 某高中共有20 個班級，每班各有40 位學生，其中男生25 人，女生15 人。若從全校800 人中以簡單隨機抽樣抽出80 人，試問下列哪些選項是正確的？
(1) 每班至少會有一人被抽中
(2) 抽出來的男生人數一定比女生人數多
(3) 已知小文是男生，小美是女生，則小文被抽中的機率大於小美被抽中的機率
(4) 若學生甲和學生乙在同一班，學生丙在另外一班，則甲、乙兩人同時被抽中的機率跟甲、丙兩人同時被抽中的機率一樣
(5) 學生A 和學生B 是兄弟，他們同時被抽中的機率小於 $\frac{1}{100}$
8. 已知 a_1, a_2, a_3 爲一等差數列，而 b_1, b_2, b_3 爲一等比數列，且此六數皆爲實數。試問下列哪些選項是正確的？
(1) $a_1 < a_2$ 與 $a_2 > a_3$ 可能同時成立

- (2) $b_1 < b_2$ 與 $b_2 > b_3$ 可能同時成立
 (3) 若 $a_1 + a_2 < 0$ ，則 $a_2 + a_3 < 0$
 (4) 若 $b_1 b_2 < 0$ ，則 $b_2 b_3 < 0$
 (5) 若 b_1, b_2, b_3 皆為正數且 $b_1 < b_2$ ，則 b_1 整除 b_2

9. 已知一容器中有A、B兩種菌，且在任何時刻A、B兩種菌的個數乘積為定值 10^{10} 。為了簡單起見，科學家用 $P_A = \log(n_A)$ 來紀錄A菌個數的資料，其中 n_A 為A菌的個數。試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $1 \leq P_A \leq 10$
 (2) 當 $P_A = 5$ 時，B菌個數與A菌個數相同
 (3) 如果上週一測得 P_A 值為4而上週五測得 P_A 值為8，表示上週五A菌個數是上週一A菌個數的2倍
 (4) 若今天的 P_A 值比昨天增加1，則今天的A菌比昨天多了10個
 (5) 假設科學家將B菌的個數控制為5萬個，則此時 $5 < P_A < 5.5$

10. 已知實係數多項式 $f(x)$ 與 $g(x) = x^3 + x^2 - 2$ 有次數大於0的因式。試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $g(x) = 0$ 恰有一實根
 (2) $f(x) = 0$ 必有實根
 (3) 若 $f(x) = 0$ 與 $g(x) = 0$ 有共同實根，則此實根必為1
 (4) 若 $f(x) = 0$ 與 $g(x) = 0$ 有共同實根，則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高公因式為一次式
 (5) 若 $f(x) = 0$ 與 $g(x) = 0$ 沒有共同實根，則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高公因式為二次式

11. 設坐標空間中三條直線 L_1, L_2, L_3 的方程式分別為

$$L_1: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{6} = \frac{z+4}{8}, \quad L_2: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+4}{4}, \quad L_3: \frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}.$$

試問下列哪些選項是正確的？

(1) L_1 與 L_2 相交 (2) L_2 與 L_3 平行 (3) 點 $P(0, -3, -4)$ 與 $Q(0, 0, 0)$ 的距離即為點 P 到 L_3 的最短距離

(4) 直線 $L: \begin{cases} x = 0 \\ \frac{y+3}{4} = \frac{z+4}{-3} \end{cases}$ 與直線 L_1, L_2 皆垂直 (5) 三直線 L_1, L_2, L_3 共平面

12. 設 $\Gamma: x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$ 為坐標平面上的圓。試問下列哪些選項是正確的？

- (1) Γ 的圓心坐標為(5,0)
 (2) Γ 上的點與直線 $L: 3x + 4y - 15 = 0$ 的最短距離等於4
 (3) 直線 $L_1: 3x + 4y + 15 = 0$ 與 Γ 相切
 (4) Γ 上恰有兩個點與直線 $L_2: 3x + 4y = 0$ 的距離等於2
 (5) Γ 上恰有四個點與直線 $L_3: 3x + 4y - 5 = 0$ 的距離等於2

第二部份：填充題

A. 令 $A(-1, 6, 0), B(3, -1, -2), C(4, 4, 5)$ 為坐標空間中三點。若 D 為空間中的一點且滿足

$$3\vec{DA} - 4\vec{DB} + 2\vec{DC} = \vec{0}, \text{ 則 } D \text{ 點的坐標為 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

B. 在坐標平面上，設 A 為直線 $3x - y = 0$ 上一點， B 為 x 軸上一點。若線段 \overline{AB} 的中點坐標為

$(\frac{7}{2}, 6)$ ，則點A的坐標為_____，點B的坐標為_____。

- C. 坐標平面上，以原點O為圓心的圓上三個相異點A(1,0)、B、C，且 $\overline{AB}=\overline{BC}$ 。已知銳角三角形OAB的面積為 $\frac{3}{10}$ ，則 ΔOAC 的面積為_____。(化為最簡分數)
- D. 設 F_1 與 F_2 為坐標平面上雙曲線 $\Gamma: \frac{x^2}{8} - y^2 = 1$ 的兩個焦點，且 $P(-4, 1)$ 為 Γ 上一點。若 $\angle F_1PF_2$ 的角平分線與 x 軸交於點D，則D的 x 坐標為_____。
- E. 設O(0,0,0)為坐標空間中某長方體的一個頂點，且知(2,2,1),(2,1,2),(3,6,6)為此長方體中與O相鄰的三頂點。若平面 $E: x+by+cz=d$ 將此長方體截成兩部分，其中包含頂點O的那一部分是個正立方體，則 $(b, c, d) =$ _____。
- F. 設 a, b 為正整數。若 $b^2=9a$ ，且 $a+2b>280$ ，則 a 的最小可能值為_____。
- G. 標平面上有一質點沿方向 $\vec{u} = (1, 2)$ 前進。現欲在此平面上置一直線 L ，使得此質點碰到 L 時依光學原理(入射角等於反射角)反射，之後沿方向 $\vec{v} = (-2, 1)$ 前進，則直線 L 的方向向量應為 $\vec{w} =$ _____。
- H. 已知坐標平面上圓 $O_1: (x-7)^2+(y-1)^2=144$ 與 $O_2: (x+2)^2+(y-13)^2=9$ 相切，且此兩圓均與直線 $L: x=-5$ 相切。若 Γ 為以 L 為準線的拋物線，且同時通過 O_1 與 O_2 的圓心，則 Γ 的焦點坐標為_____。(化為最簡分數)

2008年學科能力測驗答案

第一部份：選擇題

壹、單選題

1.(3) 2.(2) 3.(4) 4.(4) 5.(1)

貳、多選題

6.(2)(3)(4) 7.(4)(5) 8.(2)(4) 9.(2)(5) 10.(1)(3)(5) 11.(1)(2)(4)(5) 12.(1)(2)(4)

第二部份：填充題

A.(-7,30,18) B.A(4,12) B(3,0) C. $\frac{12}{25}$ D.-2 E.(-2,2,9) F.225 G.(1,-3) H. $(\frac{-1}{5}, \frac{53}{5})$